Las matemáticas en la enseñanza secundaria moderna

Alemania

I

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS HASTA 1870

La enseñanza de las matemáticas en los siglos XVI, XVII y XVIII fué tomando cada vez más un carácter de aplicación á la astronomía, á la mecánica, á la navegación y al arte militar. En el siglo XIX se produce una reacción, se transforma completamente el carácter de la enseñanza de las matemáticas, se va haciendo más lógico, más teórico, teniendo como fin principal el desarrollo intelectual.

El ilustre profesor Klein atribuye esa reacción á las influencias siguientes:

« Cuando la Prusia, al principio del siglo XIX, organizó sus Gimnasios y les atribuyó, como tarea principal, la preparación para los estudios especiales de las Universidades, los factores influyentes fueron, por una parte, la acción lenta de las ideas generales del neo-humanismo; por otra parte, y más inmediatamente, las experiencias de las guerras napoleónicas, que parecían demostrar la excelencia de una elevada cultura matemática para dar brillantes cualidades militares y administrativas: la flor de los oficiales franceses salían en efecto de la Escuela Politécnica, que en poco tiempo había adquirido elevada consideración. »

Scharnhorst, compartiendo la opinión de Napoleón, escribía en 1811: « doy muy grande valor al estudio profundo de las matemáticas: las considero como la base de toda cultura exterior de la mente y de todos los demás conocimientos. »

« En el medio clásico de la enseñanza greco - latina, creado por el neo - humanismo, en el cual sólo se ofrecía la actividad intelectual, y se desdeña toda actividad manual y toda preocupación utilitaria, las matemáticas, luchando para obtener la consideración debida, debían inclinarse hacia la sola actividad intelectual. Se separan entonces de la realidad, se desprenden de su contenido concreto y se transforman en una pura cultura de la lógica, en un medio de gimnasia intelectual. »

Su evolución terminó en 1834, en cuya época una circular oficial definía como sigue el fin de la enseñanza matemática:

« El fin principal de la enseñanza matemática en el « Gimnasio no es el conocimiento de los teoremas que, « en tal o cual circunstancia de la vida, puedan encon- « trar aplicación inmediata a los objetos sensibles. Este « fin es más bien el de ejercitar el juicio del alumno, de « acostumbrarlo a la claridad y a la precisión en sus « ideas, a la lógica de sus pensamientos. »

« Es imposible separar más netamente las matemáticas « del mundo sensible, de la realidad. » [1]

El profesor Klein hace notar que la evolución que se produce en la enseñanza de las matemáticas, en la época citada, desviándolas de las aplicaciones para dirigirlas a las abstracciones, se produce en seguida en otros países con los mismos caracteres que en Alemania. Y esta evolución no sólo se realizó en las escuelas secundarias, sino que también se hizo sentir en la enseñanza universitaria, a tal punto que fueron desapareciendo gradualmente de las Universidades las matemáticas aplicadas. — (Véase Marotte, obra citada).

En los siguientes términos expresa el profesor Klein cómo se hacía la enseñanza en 1860 en los Gimnasios alemanes:

« En geometría se exponían dogmáticamente los teore-

---

(1) Marotte — La enseñanza de las ciencias en Alemania.

mas y las demostraciones. No se utilizaba el principio de la geometría moderna, de la movilidad de las figuras: no se trataba de formar la intuición del espacio por medio de los ejercicios de dibujo.

En trigonometría se resolvían únicamente triángulos planos ficticios, cuyos ángulos debían calcularse al centésimo de segundo (mientras que la exactitud de las más delicadas medidas geodésicas apenas alcanza al segundo). Se utilizaban las tablas de logaritmos de siete decimales, no dejando de emplearse las diferencias tabulares.

La enseñanza del álgebra, que por otra parte no pasaba de las ecuaciones de segundo grado, tenía el mismo carácter abstracto; pero los numerosos problemas de la colección Heis daban un agradable complemento.

Para la mayoría de los alumnos, las lecciones de matemáticas, como también muchas lecciones de lenguas, eran indudablemente fastidiosas: sólo algunos alumnos alcanzaban plenamente el fin de la enseñanza matemática ».

Estos caracteres de la enseñanza matemática alemana empezaron á transformarse a partir de 1870.

Los descubrimientos científicos, aplicados á las industrias, la gran actividad industrial que esos descubrimientos ocasionaron, el creciente desarrollo de la actividad comercial, resultante del desarrollo industrial y de la mejora y enorme extensión de los medios de transporte, hicieron necesaria una enseñanza más adecuada á las necesidades de la época que la enseñanza clásica de los Gimnasios.

II

LA REFORMA DE LOS PLANES Y DE LOS MÉTODOS DE ENSEÑANZA

En Alemania la enseñanza matemática empezó á cambiar sus métodos después de 1870, como consecuencia de las necesidades del comercio, de las industrias y de un nuevo concepto de los fines de los estudios secundarios:

se trató de favorecer en alto grado la cultura popular para producir y dirigir el gran desarrollo económico que empezó en Alemania en 1871.

Es precisamente en esa fecha cuando se despierta el interés sobre los métodos de enseñanza, pues aparece la primera Revista dedicada especialmente a la enseñanza de las ciencias. Fundados en las ideas de la reforma aparecen sucesivamente los planes de estudios secundarios de 1882, 1892, 1901, acompañados de instrucciones metódicas sobre la manera de enseñar.

Las reformas resultantes de ese primer movimiento tuvieron como efecto modificar:

1.º El método de enseñanza oral, la manera de dar la clase.

2.º La forma bajo la cual es presentado el objeto enseñado.

«En lugar de la antigua enseñanza sintética, dice el ilustre profesor Klein, se desea una exposición de hechos matemáticos apropiada para mostrar su génesis, se desea una demostración analítica, el empleo de interrogaciones socráticas en la manera de dar la clase, — el todo conscientemente adaptado a la facultad de comprensión, todavía no desarrollada de los alumnos, que es preciso evitar de sobrecargar de estudios. — Se exige además una cultura particular de la *facultad de representación en el espacio,* que es necesario desarrollar independientemente de los procedimientos lógicos de demostración de la geometría antigua, por medio de ejercicios de dibujo geométrico, de la ilustración por el empleo de modelos, etc.»

Sin embargo, la enseñanza matemática necesitó aún 20 años para que se iniciara en la vía de los métodos modernos, y a esta se llega en tres etapas, señaladas en 1891 por *las declaraciones de Braunschweig,* en 1895 por el llamado *movimiento de los ingenieros* y en 1901 por el nuevo plan de estudios, aun en vigencia en sus principios y líneas generales.

Las declaraciones de Braunschweig, fueron las conclusiones a que llegó una importante reunión de profesores de matemáticas y de ciencias físicas y naturales de enseñanza secundaria (año 1891): esas declaraciones que tuvieron una gran resonancia en Alemania, fueron concretadas en los siguientes términos:

«*Los alumnos de las escuelas secundarias no se encuentran, en general, en estado de reconocer las relaciones matemáticas en los fenómenos que les ofrece la vida; la causa de esta situación se encuentra principalmente en el hecho de que las aplicaciones de las teorías matemáticas consisten con frecuencia en ejemplos artificialmente construídos, en lugar de tomarlos de la realidad.*

Por consiguiente, el sistema de las matemáticas enseñadas en la escuela, sin dejar de conservar su completa independencia como objeto de enseñanza, debe ser construído en sus partes aisladas teniendo en cuenta sus aplicaciones naturales (física, química, astronomía, cálculo comercial, etc.).

Los ejemplos escogidos deben habituar al alumno a percibir por sus sentidos, no sólo lo cualitativo, sino también lo cuantitativo, y esto de tal manera que esta operación resulte y permanezca para ellos una necesidad involuntaria.»

Quedó de este modo establecido el principio fundamental que, a juicio del profesorado alemán, debía regir la enseñanza de las ciencias en las escuelas secundarias; pero quien dió el concepto claro de esa enseñanza y fijó definitivamente las líneas generales de la enseñanza secundaria *moderna* ó *real*, fué la más importante de las Sociedades de ingenieros, y de aquí que el gran movimiento de reforma de los métodos, que trajo la enseñanza actual, sea designado en Alemania por *movimiento de los ingenieros.*

La aspiración de los ingenieros alemanes era la preparación más adecuada para formar hombres de acción, de iniciativa propia, capaces de idear y de ejecutar, utilizando lo mejor posible su inteligencia y sus sentidos; aunque las siguientes ideas, con que tradujo el profesor

Riedler el pensamiento de los ingenieros, se refieren a la preparación de esos técnicos, de hecho tuvieron y tienen aplicación a la educación que las escuelas secundarias deben dar a la juventud, cualquiera que sea la actividad que aspire a desarrollar en la vida social.

Decía Reidler en 1895, en su obra titulada «Zur Frage der Ingenieurs - Erzichung» : «El objeto de toda educa-« ción es la formación del hombre, el ejercicio de los « sentidos, el desarrollo de las facultades naturales, la « impulsión hacia la actividad independiente. Por ilu-« sión o prejuicio, se ha atribuído hasta aquí una acción « bienhechora a la sola forma dominante de nuestra edu-« cación secundaria, siendo así que la formación del « hombre puede obtenerse por diversas vías: el saber « adquirido, el ejercicio de la inteligencia no pueden re-« emplazar los sentidos educados. En la educación ac-« tualmente dominante, la facultad de realización, el *po-« der* son en particular deficientes.

« Para la educación del ingeniero, se trata no de sa-« ber, sino de poder, no de la sola comprensión, sino de « la posesión real. Se trata de aprender a ver, a obser-« var, a emplear todos los sentidos y de poder leer no « sólo en los libros impresos, sino también en el libro « de la naturaleza; de aprender a juzgar, no según la « comprensión de las palabras, sino según los hechos. »

« Es preciso romper completamente con el espíritu universitario, que desvía de la realidad. »

Las *declaraciones de Braunschweig* y el *movimiento de los ingenieros,* originaron la modificación de los planes de estudio y de los métodos de enseñanza de las matemáticas y de las ciencias físicas y naturales: contra la enseñanza clásica, fundada en la tradición y en los privilegios de las clases superiores de la sociedad, triunfó la enseñanza *moderna* o *real,* regida por los principios de la pedagogía y adaptada a las necesidades de la época: la enseñanza secundaria moderna ha sustituído los estudios clásicos por los científicos, y como las matemáticas constituyen

el fundamento y la estructura que da firmeza y carácter de ciencias a las demás ramas del saber, se explica la gran importancia que tomaron en los estudios modernos.

La enseñanza *real* o *moderna* en Alemania es propiamente el resultado del *movimiento de los ingenieros*: tal designación se debe a la propaganda enérgica y perseverante del *Vereim Deutscher Ingenieure*, la más importante de las sociedades técnicas alemanas, que cuenta con más de 15000 miembros. [1] Sería interesante e instructivo el escribir la historia de la participación de esta Sociedad en las reformas de la enseñanza alemana: esta institución sostuvo, con su periódico, con la gran influencia de sus asociados, con sus peticiones a los Poderes Públicos, todas las ideas que después han resultado triunfantes.

Esa propaganda unida a la de diversos profesores pusieron en movimiento la opinión pública, y dieron como resultado el decreto imperial de 1900, que oficialmente inauguró las últimas reformas que caracterizan la actual enseñanza moderna, no sólo de Alemania, sino de la casi totalidad de los países europeos.

El plan de estudios de 1901 [2] se apropió las proposiciones de Braunsweig, como claramente resulta de la siguiente observación que sobre método de enseñanza acompaña al programa oficial de matemáticas: « *La situación independiente que pertenece a las matemáticas en la enseñanza secundaria no excluye el que haya provecho para su enseñanza — sobre todo en las clases superiores -- cuando los ejercicios que lo acompañan muestran la aplicación a otros dominios, sea de la vida ordinaria, sea sobre todo de las ciencias físicas, y cuando se tiene así la ocasión de ejercitar en esos dominios el sentido matemático de los alumnos. Será permitido utilizar todavía más que antes en esta dirección las partes de la física que se prestan a tales ejercicios, y*

(1) Véase Marotte, obra citada.
(2) Marotte, obra citada.

esto no solamente en las clases de física, sino también en las de matemáticas. »

Las relaciones que se ha tratado de establecer en Alemania entre las matemáticas y sus aplicaciones no han tenido por objeto el hacer más técnica la enseñanza secundaría, lo que no sería posible ni deseable. Las últimas reformas han tenido por fin desembarazarla de sus partes muertas, de la pura lógica verbal, del cálculo numérico vacío de contenido; ellas fueron hechas para hacer esa enseñanza más interesante, *más vivaz, más cercana de la realidad.* [1]

III

EL MÉTODO DE ENSEÑANZA

Es el método socrático, llamado heurístico en los países de habla sajona, el que caracteriza la enseñanza matemática de Alemania y de los países que aplican sus ideas pedagógicas: este método se aplica principalmente en la enseñanza de los primeros años de las matemáticas elementales.

Las matemáticas que hasta principios del siglo XIX se enseñaron teniendo en cuenta sus aplicaciones [2] sufrieron en el siglo pasado una evolución radical en su enseñanza, no sólo en Alemania, sino también en Francia y en otros países europeos.

Rousseau había establecido los principios teóricos de la nueva educación: como siempre, la reforma efectiva de la enseñanza prusiana surgió de una crisis violenta de la vida nacional.

Al derrumbe de Prusia en la batalla de Yena, siguió un movimiento de reacción basado sobre nuevas ideas

(1) Marotte — La enseñanza de las ciencias en Alemanía.
(2) Marotte — obra citada.

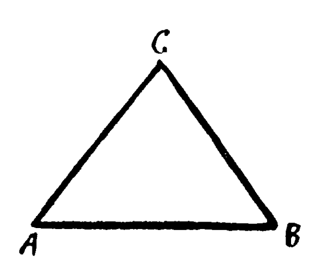
en la organización del Estado: al absolutismo que mataba el espíritu cívico, y favorecía la inercia, la pasividad y el egoísmo, se trató de sustituir, por medio de la educación popular, la actividad espontánea y libre de los ciudadanos, a fin de que el Estado basado en las nuevas ideas, desarrollara su acción inteligente, fuerte y eficaz en la reconstrucción nacional. Al principio las ideas de Pestalozzi solo fueron aplicadas a la enseñanza primaria; pero después, lentamente al principio y rápidamente en seguida, los nuevos métodos de enseñanza fueron entrando en las escuelas secundarias. Los Seminarios pedagógicos, por medio del profesorado que formaron, educado en los principios de la enseñanza moderna, propagaron esos principios, los pusieron en práctica y demostraron sus ventajas para la mejor educación mental.

De gran utilidad será para nuestros profesores el conocer en detalle la aplicación y las características del método heurístico, difundido en los últimos años en casi todos los países europeos y en los Estados Unidos. Para el efecto nada me parece más apropiado que las siguientes páginas que transcribo del interesante estudio que el profesor Marotte hizo de la enseñanza científica alemana en las escuelas secundarias, después de presenciar y estudiar el funcionamiento de las clases, observar y anotar los resultados del método heurístico y experimentar personalmente, en sus propios alumnos, los resultados de su aplicación. Se trata de un testimonio de valor, no sólo por su gran autoridad como profesor, sino también por su indiscutible imparcialidad.

« Para dar á conocer bien el método heurístico, voy a hacer la reconstitución, según mis anotaciones, de una lección que he presenciado en una clase de *Cuarta* (tercer año), compuesta de treinta y ocho alumnos.

El profesor anuncia al principiar la clase: *vamos a averiguar cual es la suma de los ángulos de un triángulo.*

Dibuja en el pizarrón, *sirviéndose de una regla*, un triángulo A B C y propone a los alumnos, escogidos en el orden más variado posible, las cuestiones siguientes:



¿Cuántos ángulos tiene el triángulo A B C?—Designe un ángulo de ese triángulo.—Designe un segundo ángulo. —¿Cuál es el tercero?

¿Cuál es la magnitud del ángulo B A C? Algunos alumnos, interrogados sucesivamente, aprecian el ángulo á simple vista y contestan:

B A C = 45º..., después 55º..., después 52.º.., etc.

Un alumno es invitado a aproximarse al pizarrón para medir el ángulo con el transportador, y encuentra

B A C = 48º

Se repite la misma operación para los otros dos ángulos: la medida con el transportador da

A B C = 62º
B C A = 71º

¿Cuál es la suma de los tres ángulos?

B A C + A B C + B C A = 181º

¿Han medido ustedes los ángulos de otros triángulos que no sea el dibujado en el pizarrón?—pregunta el profesor a algunos alumnos.—¿Qué sumas de ángulos han encontrado ustedes?

Los alumnos que han seguido en la clase del año anterior una enseñanza preparatoria de la geometría, ba-

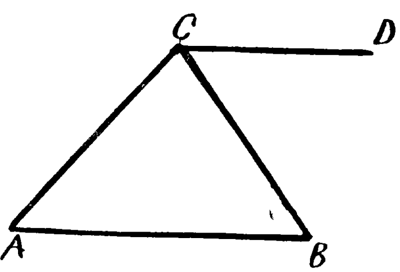
sada en el dibujo, dicen que han medido muchas veces los ángulos de triángulos que ellos mismos habían dibujado, dicen que han encontrado que la suma era de 180°.

Vuestros recuerdos no parecen muy exactos, dice el profesor, ustedes deben haber encontrado sumas próximas a 180°; pero como se os advirtió que la suma exacta es 180°, sólo habéis retenido ese número.

¿Las medidas que hemos tomado sobre el triángulo A B C son rigurosamente exactas? No, contesta el alumno interrogado.

¿Puédese, por medio de medidas semejantes, demostrar que la suma de los ángulos de un triágulo es siempre 180°? — La pregunta hecha a toda la clase queda sin contestación: explica entonces el profesor que toda medida trae como consecuencia una aproximación, y que no se puede saber por medio de medidas si la suma de los ángulos del triángulo propuesto es 180°, o un número muy próximo. Además, la medida hecha en un número cualquiera de triángulos, dejaría subsistente la duda para los triángulos no medidos. Es otro método el que ha permitido establecer que la suma de los ángulos de un triángulo cualquiera es exactamente 180°. Vamos a *construir* la suma de los ángulos del triángulo, yuxtaponiéndolos, como es natural.

El profesor dice entonces a uno de los alumnos que construya un ángulo adyacente a A C B, igual al ángulo A B C. El alumno hace cuidadosamente la construcción con la regla y el compás y obtiene así la recta C D.



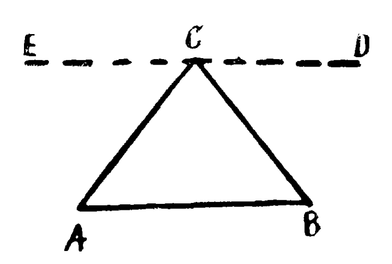
¿Qué igualdad de ángulos resulta de la construcción?

$$D C B = A B C$$

¿De esa igualdad qué propiedad resulta para la figura?

¿Qué son las rectas C D y B A? Son paralelas, responden algunos alumnos de la clase. ¿Por qué?

Vuelve a empezar la misma operación para yuxtaponer el ángulo A al ángulo C, a lo largo de la recta C A Se obtiene así la recta C E.



¿Qué son las rectas C D y C E? Son prolongación la una de la otra. ¿Por qué?

¿Por quién hemos reemplazado la suma de los ángulos del triángulo? Por la suma: D C B + B C A + A C E. ¿A qué es igual esta suma? ¿Cuál es la suma de los ángulos de un triágulo? Enuncie V. el teorema obtenido.

La suma de los ángnlos de un triángulo es igual á dos ángulos rectos.

Vuelve, en seguida, a comenzarse la demostración, pero en forma sintética. Después de haber dibujado un nuevo triángulo el profesor pregunta de qué línea auxiliar se ha servido para hacer la demostración, traza la paralela E C D y pregunta: ¿Cuáles son los ángulos iguales? ¿Porqué son iguales? ¿Qué resulta de esa igualdad?

El enunciado obtenido: la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectas, es, en fin, repetido por algunos alumnos, y después por toda la clase.

La demostración había durado los cincuenta minutos de una lección ordinaria. »

IV

CARAGTERES DEL MÉTODO HEURÍSTICO

Este ejemplo muestra muy claramente como es conducida una clase alemana. Toda la clase se desarrolla en

interrogaciones fraccionadas, muy cortas, pasando de un alumno a otro para mantenerlos atentos a todos. Esas interrogaciones son dirigidas por el profesor de modo que, o hagan descubrir a los alumnos la propiedad matemática que se desea demostrar, o bien les haga desprender de la experiencia hecha a su vista la ley física que se quiere comprobar. Las cuestiones propuestas son, como conviene, muy sencillas. Es necesario que el alumno pueda contestarles sin demasiada reflexión. Muy frecuentemente el profesor pide simplemente la descripción de una figura geométrica, de un fenómeno físico.

Los caracteres principales del método heuristico son los siguientes:

1.ª Evita el estudio de pura memoria, y hace más fácilmente asimilables los conocimientos, aun para los alumnos menos inteligentes de la clase;

2.º Mantiene despierto el interés de todos los alumnos de la clase, estimulando su actividad de una manera continua;

3.º Ejercita enérgicamente las facultades de observación, de reflexión y de invención de los alumnos;

4.º Da al profesor un contralor *contínuo* de los resultados de la enseñanza, y por lo tanto el conocimiento de la preparación que ha alcanzado la clase.

El profesor Marotte, que pudo estudiar a conciencia los métodos de la enseñanza científica de las escuelas secundarias alemanas, aprecia en los siguientes términos el método heurístico.

«El método heurístico tiene los dos caracteres principales siguientes: del punto de vista científico, coloca a los alumnos, en lo posible, en la actitud del investigador y del inventor; del punto de vista pedagógico, exige de ellos una participación activa en la enseñanza.

« Quizá la mayor ventaja de este método es la de demostrar y poner en evidencia ante el alumno el meca-

nismo de la investigación científica, de hacérsela dominar y de aprender a manejarla. La ciencia no se le presenta completamente hecha, se le enseña como se hace. La enseñanza queda así independiente de todo lo dogmático y autoritario en el método de exposición.

. . . .

«Por otra parte, he podido observar que el carácter más marcado del método heurístico, tal como se emplea en las clases alemanas, no es el ejercicio de la facultad de invención, que se considera como un hecho excepcional. Lo que de ese método se desea, sobre todo, es la participación activa del alumno en la enseñanza. Las clases que funcionan por este método son mucho más animadas que las en que se emplea el método didáctico. La atención de los alumnos se mantiene despierta en todos los instantes: todas sus facultades trabajan, pues necesitan comprender la cuestión propuesta, observar, reflexionar, encontrar ellos mismos y enunciar los resultados que han descubierto. El sentimiento que tienen de una toma de posesión, su placer de descubrir su propia actividad, los inducen a prestar atención, sin que por eso experimenten fatiga.

En fin, el método heurístico es una garantía de que la enseñanza no excede de la capacidad del alumno, de que ella es seguramente comprendida y retenida; las contestaciones de los alumnos permiten al profesor un contralor permanente e *inmediato* de los resultados alcanzados; la enseñanza se da y es asimilada al mismo tiempo; y resulta así una seguridad en la progresión, que compensa largamente la lentitud inherente al método.

El trabajo de la clase se dirige de modo que todos los alumnos tomen parte en él. No son interrogados solamente los mejores alumnos, o aquellos que levantan la mano, sino también aquellos que tienen un momento de inatención, aquellos cuyo espíritu perezoso e inerte necesita una excitación exterior. De consiguiente, la enseñanza se dirige a la media y no a la selección de la clase.

Muchos profesores me han dicho que, después del empleo del método heurístico, ya no se creía que fuera necesario un don particular para comprender las matemáticas ».

V

CONDICIONES DE APLICACIÓN DEL MÉTODO HEURÍSTICO

Lo expuesto por el distinguido profesor del *Liceo Carlomagno*, de París, demuestra con toda evidencia las ventajas pedagógicas que prácticamente pudo apreciar en la aplicación del método heurístico en las escuelas secundarias alemanas: testimonio de gran valor, dada la autoridad de quien lo da. Pero ese valor aumenta enormemente si se tiene en cuenta los resultados que el mismo profesor manifiesta haber obtenido aplicando el método heurístico en sus propias clases. Véase lo que al respecto manifiesta:

« Terminaré la apreciación del método heurístico señalando algunos de sus caracteres, sobre los cuales mi opinión ha variado de una manera curiosa.

En las notas tomadas durante mi viaje a Alemania, los señalé como defectos; y ahora, después de haberlos experimentado, me siento muy inclinado a considerarlos como cualidades ».

. . . .

« Véase, después de la experiencia que hice de ese método durante el año que acaba de transcurrir, en una clase de *segunda C* (1) de 28 alumnos y en una de *primera* (2) Sección *Ciencias*, de 11 alumnos, cuales son las condiciones de su empleo. (3)

A pesar de la apariencia, el número de alumnos de la clase es un factor importante, pero no esencial. Es cierto

(1) 5.° año, Sección latín - ciencias.
(2) 6.° año.
(3) Se refiere al método heurístico.

que una clase es tanto más fácil de dirigir por el profesor, que la enseñanza es tanto más aprovechada por los alumnos, cuanto menor es el número de éstos. Pero esto es verdad en la misma proporción, creo, para los métodos didáctico y heurístico. Los efectivos de las clases alemanas me han parecido más elevados que los nuestros: los anuarios de las escuelas que he visitado mencionan con bastante frecuencia clases de más de cincuenta alumnos. He visto clases de cuarenta alumnos funcionando por el método heurístico. La homogeneidad de la clase me parece también ser un factor favorable, pero no esencial. Los alumnos incapaces ó perezosos no obtienen ningún resultado, cualquiera que sea el método de enseñanza adoptado. He dicho ya que los alumnos débiles ó medianos no encuentran sino ventajas en el empleo del método heurístico, que les presenta las materias enseñadas bajo una forma más asimilable.

La sola condición verdaderamente esencial me parece consistir en que es necesario disponer del tiempo suficiente para dar la enseñanza con la lentitud conveniente. Se ha visto por el ejemplo antes expuesto, que se ha empleado una lección de cincuenta minutos para la demostración del teorema de la suma de los ángulos de un triángulo. Para que se pueda seguir adelante, para que los alumnos puedan participar en ella activamente, no basta que las nociones anteriormente adquiridas sean perfectamente *comprendidas*, es necesario que ellas sean estudiadas desde todos sus aspectos, que sean completamente *poseídas* y *asimiladas*, es preciso que los alumnos partan de un terreno perfectamente conocido, en el que todo se les haya hecho familiar.

Nuestros planes de estudio satisfacen mal á esta condición de tiempo y este fué el principal obstáculo que encontré en mi ensayo».

El inconveniente de la escasez de tiempo que hace notar el profesor Marotte encontró para la aplicación del método heurístico en Francia, sería mayor aún en la ge-

neralidad de los países americanos, puesto que asignan a la enseñanza de las matemáticas muchas menos horas que los países europeos. Sin embargo, dadas las ventajas que para la enseñanza matemática ofrece el método heurístico, sería conveniente que los Consejos y el profesorado latino - americanos reformaran los programas y horarios en condiciones de aplicar el método heurístico en los primeros tres años de enseñanza secundaria.

VI

LOS PROGRAMAS DE MATEMÁTICAS DE LOS GIMNASIOS

Los Gimnasios son establecimientos independientes que dan enseñanza literaria, cuyo fin cultural es semejante al de la Sección *Latín - Griego* de los Liceos franceses.

Fin general de la enseñanza matemática de los gimnasios

Seguridad en el cálculo numérico y, en particular, en el cálculo mental; aplicación segura y fácil del cálculo a las operaciones ordinarias de la vida. Estudio de la aritmética hasta el desarrollo del binomio con exponente entero y positivo. Estudio del álgebra hasta las ecuaciones de segundo grado inclusive. Estudio de la geometría plana y del espacio y de la trigonometría plana, dando nociones sobre las representaciones gráficas y las secciones cónicas.

PROGRAMA.—*1.er año.*—(Clase Sexta)—*4 horas semanales.* Las operaciones fundamentales con números enteros, abstractos y concretos.—Pesos, medidas y monedas alemanas, aplicados a ejercicios sobre la numeración decimal escrita y a los cálculos más simples con los números decimales.—Preparación al cálculo de las fracciones.

2.o año.—(Clase Quinta)—*4 horas semanales.*—Divisibilidad de los números—Fracciones ordinarias—Conti-

nuación de los ejercicios del año anterior sobre los números decimales concretos — Problemas simples, aplicando el método de reducción a la unidad, o a una común medida.

3.er año. — (Clase Cuarta) — *4 horas semanales — Cálculo.* Cálculo de las fracciones decimales — Regla de tres simple y compuesta, con números enteros y fracciones — Problemas de la vida ordinaria sobre las cuestiones más simples de porcentages, de interés simple y descuento.

Planimetría. — Enseñanza intuitiva preparatoria de la geometría — Empleo de la regla y el compás — Estudio de la línea recta, de los ángulos y de los triángulos.

4.o año. — (Clase Tercera inferior) — *3 horas semanales — Arítmética.* Las operaciones fundamentales con números absolutos — Introducción de los números absolutos — Introducción de los números positivos y negativos — En los ejercicios habrá ocasión de emplear las ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Planimetría. — Continuación del estudio de los triángulos — Estudio de los paralelógramos, de las cuerdas y de los ángulos en el círculo — Ejercicios de construcciones gráficas.

5.o año. — (Clase Tercera superior) — *3 horas semanales — Aritmética* — Revisión del cálculo de las fracciones en su aplicación a las expresiones algebraicas formadas por letras — Se completará lo estudiado en el año anterior — Los teoremas más simples sobre las proporciones — Ecuaciones de primer grado con una o con varias incógnitas — Potencias con exponentes enteros y positivos.

Planimetría. — Revisión y continuación del estudio del círculo — Areas de las figuras — Teorema de Pitágoras — Cálculo de las áreas de los polígonos — Ejercicios de construcciones gráficas.

6.o año. — (Clase Segunda inferior) — *4 horas semanales — Aritmética* — Potencias, raíces y logaritmos — Ejercicios de cálculos con logaritmos (con cuatro o cinco decimales) — Ecuaciones simples de segundo grado con una incógnita.

Planimetría.—Figuras semejantes—Líneas proporcionales en el círculo: división en media y extrema razón—Polígonos regulares — Longitud de la circunferencia — Area del círculo — Ejercicios de construcciones gráficas.

7.º año. — (Clase Segunda superior) — *4 horas semanales — Aritmética* — Ecuaciones, principalmente de segundo grado con varias incógnitas.

Planimetria — Algunas nociones sobre las divisiones y haces armónicos, y sobre las transversales — Aplicación del álgebra a la geometría — Ejercicios de construcciones gráficas, en particular los que exigen el empleo del análisis algebraico.

Trigonometría. — Goniometría — Casos simples de resolución de triángulos.

8.º y 9.º años. — (Clases Primera inferior y Primera superior — *4 horas semanales — Aritmética* — Progresiones aritméticas y geométricas — Cálculos de intereses compuestos y de rentas — Elementos de la teoría de las combinaciones: sus aplicaciones inmediatas al cálculo de probabilidades — Desarrollo del binomio con exponente entero y positivo — Revisión sintética del dominio aritmético (extensión de la noción de número por las operaciones algebraicas, desde el número entero y positivo hasta el número complejo) — Ecuaciones que pueden reducirse a segundo grado.

Continuación de los ejercicios de Trigonometría y de las construcciones geométricas planas.

La estereometría y sus aplicaciones a la geografía y a la cosmografía matemáticas — Introducción del dibujo de perspectiva de las figuras del espacio.

Nociones sobre las coordenadas — Algunos elementos sobre las secciones cónicas.

Complementos sintéticos y ejercicios en todo el dominio de los años precedentes.

VII

PROGRAMAS DE LOS GIMNASIOS REALES Y DE LAS ESCUELAS REALES SUPERIORES

La enseñanza de los *Gimnasios reales* es equivalente a la que da la *Sección Latin-Ciencias* de los Liceos franceses: la de las *Escuelas reales* corresponde a la de la *Sección Ciencias-Lenguas vivas* de los mismos Liceos.

Fin general de la enseñanza.—Seguridad y facilidad en el cálculo numérico y, en particular, en el cálculo mental; aplicación segura y fácil del cálculo a las operaciones ordinarias de la vida. Se estudia la aritmética hasta comprender el desarrollo del binomio con exponente cualquiera y las series infinitas más simples. El álgebra se estudia hasta las ecuaciones de tercer grado inclusive. La geometría plana comprende la teoría de las divisiones y haces armónicos, los ejes radicales, los centros y los ejes de homotecia. La geometría del espacio comprende los principios de la geometría descriptiva. La trigonometría plana se complementa con la esférica. Se estudia la geometría analítica plana. Se resuelven los problemas elementales sobre máximos y mínimos.

En las Escuelas reales es obligatorio el estudio de las series más importantes del análisis. En esos establecimientos se puede, según las circunstancias, o bien completar el programa de aritmética, agregándole nociones generales sobre las ecuaciones y sobre los métodos de resolución aproximada de las ecuaciones numéricas algebraicas y trascendentes, o bien completar el programa de geometría, avanzando más la geometría descriptiva, la geometría proyectiva o la geometría analítica.

1.er año.—(Clase Sexta)—4 y 5 horas semanales. Lo mismo que en los Gimnasios.

2.o año.—(Clase Quinta)—4 y 5 horas semanales. Lo mismo que en los Gimnasios.

Ademas, en la Escuela real, se da la enseñanza intuitiva preparatoria de la geometría. Fjercicios de contrucciones gráficas.

3.er año.—(Clase Cuarta)—*4 y 6 horas semanales.* Como en los Gimnasios.

Además, en las Escuelas reales, principio del álgebra y estudio de los paralelógramos.

4.o año. — (Clase Tercera inferior) — *5 y 6 horas semanales aritmética.* Operaciones fundamentales con los números absolutos. — Introducción de los números positivos y negativos. — Teoría de las proporciones. — Ecuaciones de primer grado con una incógnita. — Cálculos de aplicación de la vida ordinaria y cálculo comercial. — *Planimetría.* — Estudio de los paralelógramos (en las Escuelas reales revisión y complementación).—El círculo. Areas de las figuras y teorema de Pitágoras. — Cálculo de las áreas de los polígonos.--Construcciones gráficas.

5.o año. — (Clase Tercera superior).-- *5 horas semanales.*—*Aritmética.*— Potencias y raíces. -- Ecuaciones de primer grado con una y con varias incógnitas. — Ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

1 lanimetría.—Figuras semejantes. —Líneas proporcionales en el círculo: división en media y extrema razón.— Polígonos regulares.— Longitud de la circunferencia. — Area del círculo—Ejercicios gráficos.

6.o año.—(Clase Segunda inferior)—*5 horas semanales.* – *Aritmética.*—Logaritmos: ejercicios de cálculo con logarítmos (cuatro o cinco decimales).—Ecuaciones de 2.o grado. —Revisión de lo estudiado en los años precedentes.

Planimetría.—Aplicaciones del álgebra a la geometría.— Ejercicios gráficos, en particular los que exigen el empleo del análisis algebraico.—Revisión de la planimetría.

Trigonometría.—Elementos de goniometría. Casos simples de resolución de triángulos.

Estereometría. —Introducción al dibujo en perspectiva de las figuras del espacio.—Los cuerpos simples: cálculo de sus aristas, de sus superficies, de sus volúmenes.

7.º año. — (Clase Segunda superior). — *5 horas semanales.* —*Aritmética.*—Progresiones aritméticas y geométricas: cálculo de los intereses compuestos y de las rentas.—Números complejos.—Ecuaciones recíprocas, ecuaciones binomias y ecuaciones difíciles de 2.º grado.

Planimetría.—Divisiones y haces armónicos, ejes radicales, centros y ejes de homotecia.—Ejercicios gráficos.

Trigonometría.—Continuación de la goniometría.—Casos difíciles de resolución de triángulos.

Estereometría.—Desarrollo sistemático: complementos y aplicaciones.

8.º y 9.º años.—(Clases Primera inferior y Primera superior).— *5 horas semanales.*—*Aritmética.*—Combinaciones: sus aplicaciones al cálculo de las probabilidades.—Desarrollo del binomio con exponente cualquiera: las series infinitas más simples.—Revisión sintética del dominio de la aritmética (extensión de la noción de número por las operaciones algebraicas, desde el número entero y positivo hasta el número complejo).—Ecuaciones de 3.er grado.—Problemas elementales sobre los máximos y mínimos.—Trigonometría esférica y sus aplicaciones a la geografía y a la cosmografía matemáticas.

Geometría.— Principios de geometría descriptiva.—Exposición elemental y sintética de los teoremas más importantes sobre las secciones cónicas. — Geometría analítica plana. — Complementos, resúmenes y ejercicios de lo estudiado en las clases precedentes.

En las Escuelas reales superiores, se agregarán los temas ya indicados en el título «Fin general de la enseñanza», como obligatorios o facultativos.

Nota. — Se observará que en los programas alemanes se consideran en *aritmética* cuestiones que en los países latinos figuran en *álgebra.* En Alemania se comprende en la aritmética el desarrollo de las operaciones, aunque en ellas se consideren los números en general o representados por letras; mientras que en el álgebra se comprende más especialmente la teoría de las funciones racionales,

hasta comprender la resolución de las ecuaciones de 3.º y 4.º grados.

VIII

LA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS ARITMETICAS [1]

El cálculo. — El cálculo propiamente dicho es enseñado en Alemania y en Francia, en las clases correspondientes Sexta (Séptima), Quinta (Sexta) y Cuarta (Quinta). En conjunto, se dedica a esta enseñanza 10 horas semanales en Prusia y 8 horas en Francia.

Las *Consideraciones metódicas* anexas al programa prusiano de matemáticas, contienen, respecto del cálculo, los consejos siguientes:

« La enseñanza del cálculo debe tener en vista la seguridad y la facilidad en las operaciones con los números. Para ponerla de acuerdo con la enseñanza ulterior de la aritmética, y apropiarla a la preparación y apoyo de esta última, las reglas fundamentales de la *Sexta Clase* (1.er año) y la teoría de las fracciones deberán darse ejercitando el simbolismo matemático por el empleo frecuente de los signos y de los paréntesis. Por otra parte, no se descuidará, en el primer grado, la aplicación a la vida práctica, sobre todo para el cálculo mental. Se harán conocer las monedas, las pesas y las medidas alemanas, mostrándolas a los alumnos. Del mismo modo la naturaleza de las fracciones será explicada intuitivamente de manera que los alumnos aprendan a operar sobre las fracciones como sobre los números concretos. Los ejercicios de cálculo mental con números pequeños precederán, en todos los grados, a los problemas escritos sobre los números mayores, a fin de facilitar su comprensión. En lo posible se evitarán ejercicios demasiado complicados. Se excluirán asimismo los problemas llamados de la *vida*

(1) Marotte. — Enseñanza de las matemáticas en Alemania.

ordinaria, cuya solución exija el conocimiente de hechos y de costumbres de la práctica comercial de la que no estén en posesión los alumnos. La enseñanza del cálculo propiamente dicho concluye en la *Cuarta Clase* (3.er año) de los Gimnasios y en la clase siguiente en los establecimientos reales; pero se conservará la facilidad del cálculo mediante la ejecución de repetidos ejercicios durante la enseñanza aritmética de las clases siguientes».

Cálculo mental.—Desde el principio del curso, se da en Alemania gran importancia al cálculo mental; los alumnos se ejercitan constantemente en él, en las Clases Sexta, Quinta y Cuarta (1.o, 2.o y 3.er año), y adquieren en él suficiente práctica como para ejecutar con facilidad ejercicios bastante complicados. Ejemplos: en 2.o año el profesor propone verbalmente.

$$5,3 + 2,1 - 3,5 = ?$$
$$(12,6 - 5,7)\ 9 = ?$$

Si los números son más complicados el enunciado del ejercicio se escribe en el pizarrón, pero la solución se da oralmente:

$$\frac{28,6 - 12,1 + 15,1}{5} = ?$$

Mi impresión fué que los alumnos de esas clases y de las clases superiores calculaban bien.

IX

LA REFORMA DE LA ENSEÑANZA ARITMÉTICA

He dicho antes que la influencia de las tendencias utilitarias se manifestó, en estos últimos años, por un movimiento general de las matemáticas hacia la realidad. La enseñanza de la aritmética participó de ese movimiento en la forma siguiente:

Una primera categoría de transformaciones, cuyo origen remonta a las resoluciones de Braunsweig (1891), [1] aceptadas por los planes de estudio de 1901, consistió en separar, en lo posible, de la enseñanza los ejercicios artificiales, referentes a cuestiones fuera de la realidad y en los cualés sólo hubiera cálculos mecánicos, para reemplazarlos por ejercicios tomados de la realidad. Antiguas colecciones de ejercicios (Bardey) han sido modificados en este sentido; se han publicado otras (Schülke), que contienen aplicaciones a la astronomía, a la navegación, a la física, a la técnica y a cálculos de seguros.

Para los ejercicios, los datos son rigurosamente tomados de la realidad, y este retorno a las relaciones reales de medida trae como consecuencia la disminución del número de cifras características en los datos. Como es bastante raro, en efecto, que las medidas ordinarias de longitud, de ángulos, de tiempo, de masas, den una aproximación superior al diez milésimo, sólo se conserva en los datos cuatro cifras características. [2]

Una consecuencia de este movimiento ha sido la de reemplazar en muchos establecimientos los logaritmos de cinco decimales por los cuatro decimales.

Schülke, profesor del Gimnasio de Osterrode, ha hecho una campaña muy activa para demostrar que, en los límites de exactitud que exigen los cálculos hechos en la escuela, y aun los cálculos de la física y de la técnica, las tablas de cuatro decimales reemplazan ventajosamente los logarítmos de cinco decimales.

Estas medidas tienen por objeto, suprimiendo el cálculo mécanico vacío de contenido, aproximar los cálculos numéricos a lo que son en la realidad. En su *Aufgaben-Sammlung*, Schülke las completa de una manera muy efi-

(1) Véase pág. 189.

(2) Una transformación más completa consistiría en proponer ejercicios con medidas tomadas por los alumnos. Estos se ejercitarían así en medir realmente lo que por lo menos es extraño no encontrar en la enseñanza matemática. Pero, para esto se necesitarían trabajos prácticos de matemáticas.

caz enseñando a tener en cuenta los errores de medida que pueden afectar los datos.

En lugar de considerar las constantes físicas como cantidades exactamente conocidas, se tienen en cuenta errores posibles, preguntándose: ¿Qué variaciones experimentan los resultados cuando tal dato del problema aumenta o disminuye en 0'07, en 0,0'08?

Los alumnos pueden apreciar así los límites de exactitud de los resultados encontrados; comprueban como éstos dependen de los datos y reconocen en qué medída una corrección de los datos puede ser necesaria o absurda. Comprenden el sentido físico del problema».

X

LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA [1]

Caracteres generales y móviles de la reforma de la enseñanza de la geometría. — Ya expresé cómo las matemáticas, introducidas en los Gimnasios en los que dominaba la enseñanza lengüística, poco a poco, bajo la influencia del medio, se habían apartado de las aplicaciones hasta llegar a ser una pura escuela de lógica. Respecto de la geometría la exposición euclídea daba al respecto toda satisfacción. Así fué ella aceptada sin reserva y la geometría que, en su más amplia acepción, es el arte de medir, de representar y de construir las formas del es, pacio, se deforma al punto de llegar a ser el *arte de razonar justo sobre figuras mal hechas.*

La reforma de la enseñanza geométrica, que empieza en Alemania hacia 1870, fué una reacción contra los métodos euclídeos. Dos clases de consideraciones obraron en el mismo sentido y ocasionaron una renovación de esta enseñanza dando mayor importancia a los métodos intuitivos.

(1) Marotte. — Obra citada.

Fueron al principio *consideraciones pedagógicas,* expresadas bajo una forma muy feliz por Jacobí, desde 1846, pero que no tuvieron verdadera influencia hasta después de 1870. Véase cómo se expresa el eminente analista que, escribiendo el prefacio a una *Introducción a la geometría descriptiva*, se revela excelente profesor :

« El rigor de las demostraciones geométricas es una « invención de los griegos que hace mucho honor a la « inteligencia humana; pero ese rigor sólo es una nutri- « ción conveniente y sana para los jóvenes cuyo espíritu « haya adquirido cierta madurez: solamente entonces la « geometría lógica es, como la gramática, una verdadera « educación de la inteligencia. No es de buena pedagogía « obligar al niño, a quien el mundo de las formas geo- « métricas es completamente extraño, a dar en él sus « primeros pasos de una manera lógica y sistemática. Es « principalmente a este error que se atribuye ese fenó- « meno notable de que, solas entre todos las materias de « la enseñanza no dejan ninguna traza en la mayor parte « de los que las han estudiado ».

Y Jacobi explica en seguida el fin de la obra que presenta: con el auxilio del dibujo, familiarizar a los alumnos con las formas y las nociones, geométricas, excitar su interes por una creación personal, despertar en ellos el deseo de una comprensión más perfecta que más tarde será satisfecha por una demostración rigurosa: en fin, dar al que sólo tuviera una débil aptitud para el raciocinio deductivo los conocimientos geométricos útiles en la vida práctica.

En el mismo sentido, y más vigorosamente todavía, obrarán las *consideraciones utilitarias*, invocadas más recientemente, en el período de realismo en que se encuentra actualmente Alemania.

La doble influencia de las preocupaciones pedagógicas y de las preocupaciones utilitarias, son las que produjeron en la enseñanza tradicional euclídea de la geometría, muchas transformaciones, las que estudiaré a continuación.

La enseñanza intuitiva de la geometría.—Con el objeto de salvar las dificultades que ofrece a los principiantes el estudio abstracto de la geometría, se instituyó, primero en Austria y después en Alemania, un primer ciclo de estudios, en el que la geometría se enseña práctica y experimentalmente, y no por el método deductivo. Austria inició esa reforma en 1849.

« Es en los planes de estudio de 1882, redactados bajo a dirección de Bonitz, organizador de la enseñanza austriaca, que aparece por primera vez en Alemania, una *enseñanza intuitiva preparatoria de la geometría.* [1]

Los planes de estudio de 1901 la definen así: « La en- « señanza geométrica comienza por una instrucción pre- « paratoria que forma las facultades de concepción y de « representación por el estudio de las formas simples del « espacio, y, al mismo tiempo, da ocasión a los alumnos « de ejercitarse en el empleo del compás y de la regla. » No se asigna a esta enseñanza sino *una hora por semana en tercer año* (Gimnasio y Gimnasio real) o en segundo año (Escuela real superior).

La enseñanza intuitiva de la geometría no tiene, en Prusia, ni el fin ni el amplio desarrollo que tiene en Austria. No es su propósito el que se haga un estudio completo de todo el dominio de la geometría elemental; por lo contrario, esa enseñanza, es estrictamente una preparación, una introducción de la enseñanza lógica y sistemática, sobre cuyo contenido aquélla no debe superponerse. Su fin es simplemente dar, por el aspecto, el conocimiento familiar de las formas del espacio, ejercitar su descripción, hacer conocer los axiomas y dar alguna práctica del dibujo geométrico. En suma, reemplaza ventajosamente, o por lo menos ilustra, algunas páginas de definiciones, nociones, principios, axiomas que se encuentran al principio de todos los tratados de geometría; establece la base experimental sobre la cual será edificada la geometría deductiva.

---

(1) Marote.—Obra citada.

Esta primera enseñanza se da a partir de los cuerpos del espacio, modelos u objetos familiares.

Véanse algunos ejercicios que he visto tratar y que me han sido comunicados:

Medir una longitud dada; agregar, restar dos longitudes; apreciar a simple vista una longitud dada, y después verificarla por su medida.

Los mismos ejercicios aplicados a los ángulos.

Construir un triángulo equilátero conocido el lado.

Medir sus ángulos. ¿Por qué son iguales?

Construir un triángulo cuyos lados son conocidos. Con esos datos ¿Cuántos triángulos se pueden construir? ¿Qué son entre sí dos triángulos cuyos lados son iguales dos a dos? Medir los ángulos de un triángulo ¿cuál es su suma? Comparar los ángulos a los lados opuestos: ¿Cuál es el resultado? Al mayor lado se opone el mayor ángulo. ¿Siempre es así?

Medida de las superficies, comparando superficies recortadas en una hoja de papel.

Medida de los volúmenes, operando sobre modelos de madera por pesadas o sobre modelos huecos qne se llenan de agua.

Estos ejercicios de medidas de superficies y de volúmenes son tomados de la enseñanza badense, donde la geometría intuitiva toma mucha mayor importancia que en Prusia, y donde, como en Austria, la enseñanza de la geometría está dividida en dos ciclos sucesivos.

La geometría del espacio, en Prusia, empieza también por una instrucción preparatoria que tiene por objeto una *introducción al dibujo de perspectiva de las formas del espacio.*

La enseñanza lógica de la geometría.—Esta enseñanza empieza en la Clase Cuarta (3.er año) en todos los establecimientos de enseñanza secundaria. Tiene, más o menos, el mismo carácter que la francesa y sigue la misma progresión; sin embargo, la medida de las áreas y el teorema de Pitágoras, preceden el estudio de las figuras semejantes.

Para conducir las demostraciones, los profesores dan, según sus tendencias, más o menos importancia al análisis lógico. Los que consideran que las matemáticas valen sobre todo como gimnasia intelectual se esfuerzan de hacer de la geometría una escuela de lógica aplicada. Enunciado un teorema los alumnos son invitados a formular la hipótesis y la conclusión, que se escriben en el pizarrón. Durante la demostración los resultados parciales sucesivamente adquiridos son notados como otros tantos mojones o señales que marcan la vía que conduce a la conclusión; los alumnos toman en sus cuadernos un esquema de la demostración establecida en forma de hacer resaltar las relaciones lógicas. Estos ejercicios se hacen principalmente en 3.º, 4.º y 5.º años: son más raros en las clases superiores, en las cuales los alumnos están ya entrenados.

Por otra parte, los profesores, que siguen las nuevas tendencias y hacen mayor empleo de los métodos intuitivos disminuyen la importancia dada a la lógica formal.

Por lo demás, todos los profesores están de acuerdo para conservar, en la enseñanza lógica de la geometría, el cuidado del dibujo correcto y de la representación exacta de las formas geométricas. En el pizarrón las figuras se dibujan siempre con la regla graduada, la escuadra y el compás; en una clase donde se estudiaban las cónicas he visto emplear patrones recortados de cartón grueso para dibujar en el pizarrón una elipse, una hipérbola, una parábola. El exceso de tiempo que exige la construcción correcta es ampliamente compensado por la ventaja que obtiene el alumno haciendo realmente, o viendo hacer la construcción, la cual comprende y retiene mucho mejor que aquel para quien sólo fuera hipotética. En fin, la geometría deja así de ser *el arte de razonar justo sobre figuras mal hechas,* y toma su verdadero carácter, la aplicación de la lógica al estudio de las formas exactamente observadas.

. . . .

Los ejercicios gráficos.—Entre las aplicaciones del curso de geometría, una parte muy importante se dedica a los ejercicios, que tienen la forma general siguiente:

« Construir una figura conociendo los elementos que bastan para determinarla ».

La importancia que se da a esos ejercicios resulta de la circunstancia de que figuran regularmente en el programa de cada clase; además, las instrucciones metódicas anexas a esos programas dicen:

«En todos los establecimientos, se harán ejercicios de construcciones geométricas de la manera más asidua desde la Clase Tercera inferior (4.º año), y deberán continuarse hasta la clase más elevada. Pero deberán excluirse rigurosamente todos los problemas cuya solución exige teoremas poco conocidos o artificios especiales. Por una juiciosa elección de problemas que puedan ser resueltos por métodos nuevos, por una clara dirección, el profesor deberá despertar en el alumno el sentimiento de que él puede hacer por sí mismo alguna cosa y hacer apreciar el valor educativo de esos ejercicios.»

Los profesores alemanes, en su mayoría, atribuyen un gran valor a esos ejercicios, no solamente porque afirman y aclaran los conocimientos ya adquiridos, sino sobre todo porque ofrecen una ocasión de enseñar los procedimientos de la investigación geométrica. Para esto la solución del problema se descompone cuidadosamente en tres grados sucesivos: el análisis, es decir la investigación de las relaciones útiles entre los datos y las incógnitas; la construcción de la figura pedida; la demostración o verificación.

Esos ejercicios acompañan todas las partes del curso y se suceden desde las construcciones fundamentales iniciales: trazar una perpendicular, una paralela a una recta, trazar la bisectriz de un ángulo, hasta la construcción de las cónicas. Veremos pronto que se ha extendido a la geometría del espacio.

Pero los problemas sobre construcción de triángulos son

objeto de una particular predilección. Se vuelve sobre ellos con tanta insistencia como se hace en Francia para las ecuaciones de 2.º grado, y no es extraño que haya al respecto el mismo abuso. Los elementos que sirven para determinar el triángulo, no son solamente los lados, los ángulos, las alturas, sino también las bisectrices los radios de los círculos circunscriptos, incriptos y ex-incriptos, los segmentos determinados por esos círculos sobre los lados, etc.

Esta gimnasia de la geometría del triángulo llega, a veces, hasta una complicación sorprendente. De ella puede juzgarse por los siguientes ejercicios que tomo de los cuadernos de alumnos de dos clases de Tercera Superior (5.º año).

Contruir un triángulo conociendo:

1.º $a + b + c$, A y la mediana m_a
2.º $a + b + c$ A y r
3.º a, r y r_a
4.º a, $b - c$ y r
5.º a, A y m_a
6.º a, A y r

A pesar de esos abusos inevitables, contra los cuales los *utilitarios* con frecuencia han protestado, los ejercicios de construcción forman un útil complemento del curso de geometría: interesan vivamente a los buenos alumnos y les ofrecen una excelente ocasión de ejercitarse en el trabajo personal.

XI

LA UNIÓN DE LA GEOMETRÍA Y DEL DIBUJO

La educación de la intuición del espacio.— Es esta la reforma más importante y la más fecunda perseguida en los últimos cuarenta años por la enseñanza geométrica y

que los planes de estudio de 1901 han consagrado definitivamente.

Las ideas directrices de esas reformas son las siguientes: Conjuntamente con la facultad lógica de razonar bien, hacer la educación geométrica del ojo, de la mano y de la imaginación; ejercitar en la observación de las formas, en su representación por medio del dibujo, desarrollar la facultad de ver plásticamente en el espacio.

Con el empleo de modelos, fué la unión íntima de la geometría y del dibujo que permitió alcanzar esos resultados. Las consecuencias más inmediatas de este auxilio mutuo que se dieron la geometría y el dibujo fueron, ilustrar la geometría y profundizar el dibujo.

En geometría plana el rol del dibujo es doble. Permite desde luego ejecutar las construcciones explicadas en el curso teórico de la geometría y por consiguiente asimilar las propiedades geométricas, no solamente por haberlas oído y comprendido, sino también por haberlas comprobado por la vista, por haberlas empleado y sobre todo por haberlas, en cierto modo, realizado por una creación personal.

En segundo lugar, el dibujo extiende el curso de geometría y lo liga con los dominios próximos, la cinemática por ejemplo. La construcción gráfica permite, en efecto, estudiar fácilmente las curvas definidas por propiedades geométricas o cinemáticas.

He visto en Stuttgart la exposición de dibujos hechos en el año por los alumnos de dos establecimientos reales; fué para mí una revelación el comprobar cuánto la unión íntima del dibujo y de la geometría aumenta en extensión y en profundidad los conocimientos geométricos, mientras que nuestros alumnos, en las clases elementales, estudian solamente la recta, el círculo y las cónicas, definidas únicamente por sus propiedades focales. En los dibujos expuestos se veía además las cónicas engendradas como lugares de puntos o envolventes de tangentes por haces o divisiones homográficas; las

curvas más interesantes de grados superiores, cisoides, estrofoides, conchoides, óvalos, etc.; las trayectorias de los puntos de una figura plana móvil en su plano, cicloides, epicicloides, etc.; curvas envolventes. Todos esos dibujos están hechos en forma de hacer inmediatamente sensible la generación de la curva; si se trata, por ejemplo, de una curva definida como lugar de los puntos de intersección de dos series de rectas, estas rectas están señaladas en trozos rojos por un número suficiente de puntos dispuestos regularmente sobre la curva, y ellas son detenidas en la curva de modo que la dejen aparecer al primer golpe de vista. Se obtienen así dibujos muy claros, muy legibles, que muestran inmediatamente la generación de la curva y sus propiedades de forma y de situación.

Este método geométrico tiene caracteres muy diversos del método euclideano: procede más con la construcción gráfica que con la lógica, estudia más bien las formas aproximadas que las relaciones exactas de medida. En cierto modo, puede ser considerado como la traducción gráfica de la geometría analítica de la cual en parte posee la potencia.

Agrego que este método es el que se emplea en la práctica, donde todas las curvas son definidas gráficamente o cinemáticamente y donde importa más bien conocer la marcha o curso de las curvas que sus propiedades lógicas. Es una razón de más para hacer conocer ese método a los alumnos que se interesan siempre vivamente a lo que la enseñanza les revela de la naturaleza, del arte o de la técnica.

Es sobre todo para la geometría del espacio que la unión con el dibujo se ha mostrado fecunda. Ella ha producido un cambio completo de orientación, cuyos caracteres fueron: mayor acentuación en el concepto gráfico de la estereometría con relación a los conceptos deductivo y aritmético que antes dominaban; por consiguiente una penetración íntima de la geometría del espacio y de la geometría descriptiva.

Se sabe que la principal dificultad de la estereometría para los principiantes consiste en que las figuras estudiadas son de tres dimensiones y no pueden ser representadas con su forma real por los croquis que acompañan las demostraciones. Antes de estudiar las relaciones lógicas entre los seres del espacio, conviene pues ejercitar al alumno a representarlos convencionalmente por imágenes planas, e inversamente a concebir plásticamente los objetos partiendo de sus imágenes.

Es lo que prevén los planes de estudios prusianos de 1901 para los Gimnasios reales y Escuelas reales superiores.

El programa de los Gimnasios no contiene la geometría descriptiva, pero impone la progresión que se observa en 7.º y 8.º año de los Gimnasios reales y Escuelas reales en cuanto a las figuras en el espacio.

Las instrucciones anexas a los programas indican el método que debe seguirse en las tres clases de establecimientos secundarios.

« Conviene empezar la estereometría por el estudio de sólidos simples, como el cubo y el prisma, y seguir solamente más tarde el método deductivo más riguroso. Aquí, lo mismo que en las clases precedentes, sería provechoso el empleo de modelos y cuadros matemáticos para ilustrar y profundizar la enseñanza ».

La geometría del espacio empieza, pues, en Alemania, por un curso preparatorio cuyo objeto es enseñar a representar exactamente las formas del espacio. Véase cómo se hace esa enseñanza.

Se empieza por establecer experimentalmente, utilizando modelos de alambre, de carton, de madera, las propiedades geométricas que sea útil conocer. Sobre un cubo, por ejemplo, se comprueba, por medidas de longitud y de ángulos, que las aristas son todas iguales, que son paralelas o perpendiculares, que las seis caras son cuadrados iguales.

Conocidas esas propiedades, se propone construir la

imágen del cubo, es decir, el dibujo que da, en lo posible, la misma impresión visual. Lo que conduce inmediatamente a representar el cubo por su perspectiva sobre el plano del pizarrón.

Un estudio rápido de las diversas perspectivas del cubo muestra muy pronto que sus propiedades geométricas son particularmente simples cuando el ojo está lo bastante lejos como para que se le pueda considerar en el infinito, siendo entonces los rayos visuales sensiblemente paralelos; además, la imágen obtenida conviene particularmente a la representación del cubo cuando esos rayos son oblícuos a las aristas, pues las imágenes de las aristas no se recubren y las caras del cubo están entonces representadas por superficies y no por líneas.

De ahí resulta esta conclusión: Tomar provisoriamente por imágen del cubo su proyección oblícua o su perspectiva paralela sobre el plano del pizarrón.

Las propiedades geométricas de la proyección paralela son en seguida obtenidas experimentalmente, estudiando la sombra arrojada, sobre el pizarrón, de un cubo de alambre alumbrado por el sol. Se comprueban fácilmente las propiedades fundamentales siguientes:

1.º Los segmentos proyección de dos segmentos paralelos son paralelos y proporcionales a las longitudes de esos segmentos;

2.º Una figura paralela al plano del pizarrón es igual y homotética a su perspectiva.

Después que esas propiedades, que bastan a toda la perspectiva paralela, están establecidas, se pasa a la representación de los cuerpos, siguiendo, por ejemplo, la progresión siguiente:

El cubo, los prismas regulares triangular y exagonal, el octaedro y el tetraedro regulares, la pirámide exagonal regular, las secciones planas de esos diversos sólidos.

El cubo con las circunferencias inscriptas en sus caras; el cilindro y el cono de revolución; la esfera (en proyección ortogonal), las secciones planas de esos sólidos.

Determinación de las sombras.

Intersección de los sólidos.

Es conveniente recordar que el objeto de estos ejercicios es más bien ejercitar en la representación correcta de las formas que caracterizan la naturaleza geométrica de las figuras o de las curvas obtenidas.

Para las secciones cónicas, por ejemplo, importa más enseñar a colocarlas con relación al cono, a su contorno aparente y al plano secante, que buscar sus propiedades focales por el teorema de Dandelin; este último estudio se hará más adelante, cuando se haga el desarrollo sistemático de la estereometría.

Además, todos los dibujos se hacen utilizando modelos que se presentan a los alumnos, sobre los cuáles ellos mismo toman las medidas, comprobando las propiedades geométricas necesarias, y que les permiten adquirir las pocas nociones que son indispensables para no cometer faltas groseras en el dibujo. No se deja de explicar, utizando los modelos, la distinción entre las partes vistas y ocultas de su representación. Para que los dibujos sean más legibles, se lavan con tintas uniformes y, si se trata de intersección de sólidos, a dos colores.

Los dibujos de poliedros frecuentemente son acompañados por sus desarrollos, los cuales son utilizados para que los alumnos reproduzcan, en papel o en cartón, los cuerpos que han dibujado. Poliedros regulares, penetraciones de prismas y de pirámides se construyen de este modo. El estudio de las formas geométricas es llevado así hasta su último término, que es la realización misma de esas formas.

La enseñanza no se limita a la representación de los cuerpos que sólo tienen interés geométrico. Esos ejercicios sirven de preparación al dibujo de aplicación: representación de las formas cristalinas más simples, construcción de las figuras de la cosmografía, dibujos esquemáticos tomados directamente de aparatos de física, de órganos de máquinas, de fragmentos arquitectónicos.

Después que los alumnos se han ejercitado así en el dibujo de perspectiva, empieza en las clases siguientes el estudio de las dos ramas de la estereometría. La primera tiene por fin el cálculo de las formas geométricas, es nuestra geometría ordinaria del espacio. La segunda tiene por objeto su representación por medio del dibujo, es nuestra geometría descriptiva. Este estudio se hace, entonces, rigurosamente por el método deductivo, a partir de nuestro 5.º libro; pero se aborda este estudio después de una preparación que lo facilita. El alumno no encuentra ya dificultad en concebir plásticamente los dibujos planos que representan las relaciones espaciales; sabe ejecutar correctamente los cróquis estereométricos; su significación geométrica del espacio está desarrollada.

Además, se continúa sosteniendo la enseñanza con el empleo de modelos y aparatos apropiados: tableros de charnelas figurando los planos de proyección de la geometría descriptiva, modelos que muestran la perspectiva de un cuerpo, lámparas para producir las sombras con luz paralela o convergente.

Para dar a conocer hasta dónde puede ir la enseñanza de la geometría descriptiva, reproduzco a continuación el programa propuesto por Hildebrandt para las Escuelas reales superiores, haciendo observar que es el programa más extenso que ha sido publicado.

« Representación del punto, de la recta y del plano en proyección ortogonal. Representación de sólidos con sus secciones planas. Intersección de sólidos. Proyección axonométrica.

« Construcción de sombras. La elipse como sombra del círculo (teorema de Dandelin para el cilindro); sus propiedades proyectivas.

« Perspectiva. Las cónicas como proyecciones centrales del círculo (teorema de Dandelin para el cono); sus propiedades proyectivas.

« Las superficies de segundo orden en proyección ortogonal ».

En este desarrollo sistemático es donde se hace la demostración matemática de las reglas empíricas que han servido, al empezar el curso, para construir las perspectivas paralelas de los sólidos geométricos.

En esta enseñanza de la geometría descriptiva se restringe en lo posible la exposición de las relaciones abstractas entre los puntos, las rectas y los planos, en provecho de la representación de los cuerpos concretos. Con frecuencia no se abordan problemas abstractos sino sirven para resolver cuestiones concretas y á estas referidas.

Este método de estudio es muy interesante y muy provechoso para los alumnos; dando á los principios abstructos un apoyo real, se facilita mucho la enseñanza y se retienen los conocimientos. En fin, se evita así el defecto que aparece tan netamente en nuestros programas franceses en los cuales el estudio de los métodos y de los problemas abstractos está tan desarrollado que no queda tiempo para ocuparse de las aplicaciones [1].

Entre las particularidades de la enseñanza de la geometría descriptiva en Alemania, he observado frecuentemente que los dibujos del curso teórico son ejecutados sobre el papel de la lámina al mismo tiempo que el profesor los explica en el pizarrón. Los alumnos no toman apuntes, pues tienen un texto, y los dibujos correctamente dibujados les son más provechosos que los cróquis hechos á pulso en un cuaderno; la ejecución práctica marcha así paralelamente con la explicación teórica.

Agrego, en fin, qne se hace un empleo frecuente de los colores para hacer más legibles los dibujos.

---

(1) Compárese a este respecto nuestros tratados de geometría descriptiva y el de los profesores Müller y Presler.

XII

LA ENSEÑANZA DE LA TRIGONOMETRÍA

La exposición que en Alemania se hace de la Trigonometría difiere, notablemente de la adoptada en Francia. Esas diferencias, de las cuales resultan ventajas é inconvenientes, son interesantes, pues ellas se relacionan estrechamente á los dos métodos de enseñanza heurística y didáctica que respectivamente predominan en cada país.

« La trigonometría, dicen los comentarios de los programas prusianos, deberá tratarse al principio por los métodos intuitivos, es decir geométricos; para llegar lo más pronto posible al cálculo de los triángulos, sólo se enseñarán al principio las fórmulas más indispensables ».

De acuerdo con esas prescripciones, la trigonometría está dividida en dos grados sucesivos:

1.º Parte geométrica: funciones trigonométricas, de los ángulos agudos y obtusos, resolución de los triángulos;

2.º Parte analítica: medida de los arcos, funciones circulares, fórmulas de adición de los arcos.

Este desarrollo de la trigonometría es precisamente el que se seguía en nuestra anterior enseñanza moderna (Francia): nuestros nuevos programas prescriben, al contrario, la marcha inversa y colocan el estudio analítico de las funciones circulares antes de la resolución de los triángulos.

De esta diferencia de coordinación resultan consecuencias importantes.

Las diferencias aparecen desde el punto de partida. En nuestra enseñanza las funciones circulares son definidas a partir del círculo trigonométrico, como números ligados a los diversos arcos, y sin que su empleo en el cálculo de los triángulos aparezca inmediatamente: la razón de su creación, su utilidad, quedan, pues, al principio ocultas, y la trigonometría empieza por una estructura

de apariencia artificial. En Alemania la definición de las funciones trigonométricas está relacionada a la semejanza de los triángulos, y al principio esas funciones son las relaciones de los lados del triángulo rectángulo. Las ventajas inmediatas de esta manera de proceder están en ir así a la fuente de las nociones trigonométricas y en que se aprende a resolver los triángulos rectángulos desde la primera lección de trigonometría. Además, las funciones trigonométricas son así presentadas como números abstractos, razones de longitudes, mientras que la definición por el círculo trigonométrico puede hacerlas aparecer como segmentos.

Es después solamente, estudiando las variaciones de las funciones trigonométricas y manteniendo constante (pero no necesariamente igual a 1) el denominador de las razones a estudiar, que se viene, de una manera completamente natural, a hablar del círculo trigonométrico.

La definición de las funciones trigonométricas para los ángulos obtusos se hace, o bien prolongando en el segundo cuadrante del círculo las definiciones adquiridas en el primero, o bien, lo que mantiene mejor la unidad del método, aceptando convencionalmente las fórmulas establecidas para los triángulos agudos como valederas para los triángulos que tienen un ángulo obtuso.

Esta enseñanza de los primeros elementos de la trigonometría me parece excelente, con tal que no se la quiera prolongar, como se hace con frecuencia, hasta fórmulas cuya demostración geométrica es demasiado artificial (1) y que no tienen más que el mediocre interés de permitir el cálculo por logaritmos. No hay inconveniente en no establecer esas fórmulas sino después de la adición de las funciones circulares.

La segunda parte de la trigonometría, el estudio general de las funciones circulares, tiene por base la noción

(1) Tal es la fórmula: $\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}{a+b}$

ya adquirida del círculo trigonométrico, que permite extender para todos los valores del arco las definiciones de las funciones trigonométricas dadas para los dos primeros cuadrantes. El hecho de que en Alemania la teoría de los números positivos y negativos está establecida sobre bases poco seguras es causa de que esa extensión con frecuencia se hace de una manera muy indecisa y que se presta mucho a objeciones.

Es quizá también el manejo incierto de los números afectados de signos que conduce a establecer las fórmulas de adición de las funciones circulares sin emplear el teorema de las proyecciones. Esas fórmulas se establecen geométricamente sólo para los arcos del primer cuadrante: se demuestra en seguida, o más bien casi siempre se admite, que esas fórmulas sean constantemente aplicables.

En apoyo de esta manera de proceder puede decirse que es más natural, que resulta más espontánea de la investigación, y que así se presta mejor al método heurístico de la enseñanza alemana. La demostración por el teorema de las proyecciones es una obra de elaboración, de sistematización, á la cual conviene más bien la enseñanza didáctica de nuestras clases.

Pero, por otra parte, el teorema de las proyecciones se ha hecho el instrumento de un método que es de un empleo frecuente, que es tan simple y tan seguro, cuando se le posee bien que de un golpe da demostraciones tan generales, que resultan inconvenientes mayores si se lo deja ignorar á los alumnos. Es, por ejemplo, una consecuencia de esta ignorancia que, en la enseñanza de la geometría analítica, muchas fórmulas sólo están establecidas para casos particulares, mientras que se admite su validez general.

La trigonometría plana es, en fin, seguida de la trigonometría esférica. No se hace de ella un estudio detallado, sino que se establecen solamente las fórmulas necesarias para la inteligencia de la cosmografía, lo que

no exige más de dos ó tres horas de enseñanza, si se renuncia á ponerlas siempre bajo forma calculable por logaritmos. La cosmografía se liga así estrechamente á la trigonometría que es para aquélla un útil de primera necesidad.

XIII

LA ENSEÑANZA DE LA COSMOGRAFÍA

La tradición, que ha colocado la cosmografía entre las ciencias matemáticas y la ha hecho enseñar por los matemáticos, no ha dejado de ejercer una influencia enojosa sobre su enseñanza. Debido a ella es que esta ciencia de observación ha quedado separada del movimiento que ha fundado sobre la experiencia o la observación la enseñanza de las ciencias físicas y naturales.

Resulta que la enseñanza elemental de la cosmografía ha quedado profundamente dogmática; esa enseñanza da a conocer resultados y leyes sin mostrar cómo se establecen, ni siquiera verificarlas. La tradición matemática hace desconocer completamente el carácter de ciencia física que pertenece a la cosmografía.

En Alemania, lo mismo que en Francia, a la cosmografía le falta la base que le darían las observaciones hechas delante de los alumnos, y, lo que sería mejor todavía, por los mismos alumnos. Sin embargo, la posesión de la trigonometría esférica permite en Alemania hacer conocer los métodos astronómicos usuales y desarrollar los cálculos tales como se hacen en la realidad. Los tratados de cosmografía franceses, por lo contrario, no pueden, por falta de la trigonometría esférica, mostrar cómo se estudia los movimientos de las estrellas, del sol, de los planetas, cómo se determina prácticamente la longitud y la latitud en el mar, etc.

Los cálculos de la cosmografía se encuentran entre las

aplicaciones más interesantes de la trigonometría plana y esférica. Cada vez más se va dando mayor importancia a los problemas que se presentan en la navegación, desde que, en la opinión alemana, crece el interés por las cosas del comercio marítimo.

XIV

LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA Y LA GEOMETRÍA «MODERNA» O PROYECTIVA

La enseñanza de la geometría termina en las clases superiores de los tres tipos de escuelas secundarias por el estudio de los elementos de la geometría analítica y de la geometría proyectiva; pero en ninguno de ellos es propósito dar de ellas una enseñanza sistemática y completa. En los gimnasios se trata principalmente de iniciar a los alumnos en el manejo de las coordenadas. Aun en las Escuelas reales lo que el programa llama geometría analítica del plano no comprende generalmente más que el estudio de la línea recta, del círculo y de las cónicas sobre las ecuaciones reducidas.

Un rasgo característico del método alemán es que el punto de partida es siempre concreto. Así, en lugar de partir de la ecuación general de segundo grado para llegar en último término solamente á las definiciones geométricas de los tres géneros de cónicas, se deduce más bien de esas definiciones las ecuaciones reducidas de las cónicas y se busca, por medio de esta representación analítica, las propiedades principales de esas curvas. Después la transformación de coordenadas permite encontrar su ecuación en un sistema cualquiera de ejes y se demuestra entonces que la ecuación general de segundo grado no define más que cónicas.

El plan de estudios de las Escuelas reales superiores da la facultad de extender á voluntad el curso de geo-

metría, llevando más adelante la geometría analítica, ó la proyectiva, ó la descriptiva. En algunas escuelas se trata así, con el espíritu que acabo de indicar, la geo metría analítica del espacio: recta, plano, superficies de segundo orden sobre las ecuaciones reducidas.

Sin embargo, muchos profesores muestran una gran reserva respecto de la geometría analítica que, de hecho, no toma gran extensión en la enseñanza. Las líneas siguientes del profesor Max Simón caracterizan muy netamente este estado de ánimo:

« La mayor parte de los alumnos llegan difícilmente a comprender fácilmente la geometría analítica; sin duda se les podrá adiestrar en establecer toda clase de ecuaciones y en transformarlas por el cálculo; pero los jóvenes de 18 años no comprenden en general las ideas fundamentales muy abstractas de la geometría analítica, que aun un genio como Descartes no pudo llegar á exponerla claramente ».

Así es que, con frecuencia se prefiere al desarrollo más completo de la geometría analítica el estudio de los métodos y de las figuras de la geometría proyectiva, razón anarmónica, divisiones y haces armónicos, divisiones y haces en involución, teoría proyectiva de las cónicas.

A causa del apoyo que esas teorías dan á la geometría descriptiva, este estudio está particularmente en favor y en concepto de los que se han esforzado en aumentar, de la manera que hemos visto, la parte del dibujo en geometría.

XV

LOS TEXTOS: SU EMPLEO Y SU ELECCIÓN

Una de las consecuencias del empleo del método heurístico en Alemania es el reconocimiento de la utilidad de los textos como base y síntesis de la enseñanza oral.

Una circular de 1833 ha llegado a establecer como obligatorio el uso de textos para toda la enseñanza matemática.

Sin embargo, aunque esa disposición no ha sido derogada, ya no se siguen rigurosamente sus prescripciones; principalmente en las clases superiores. El profesor Redit, decía en 1886:

« La redacción en clase de notas extensas, o aún el dictado del curso hecho por el profesor, antes de uso frecuente, exigen de los alumnos una comprensión totalmente exacta, y hacen perder tanto tiempo, que con razón han sido completamente desechados y aún probibidos. »

He podido comprobar que el uso de los textos ha llegado a ser habitual en las clases alemanas, y sólo he visto muy excepcionalmente (tres o cuatro veces) a los alumnos tomar por escrito las lecciones del curso.

Al mismo tiempo que sirve de base al curso, el texto asegura la continuidad de la enseñanza en las clases sucesivas. El alumno conserva durante todo el curso de sus estudios el mismo tratado de geometría o de física, la misma colección de ejercicios.

Los textos no son, por lo tanto, escogidos solamente por el profesor. Es la *Foch Konferenz*, la asamblea de los profesores del establecimiento, la que determina los textos que en él deben emplearse. La lista de esos textos se encuentrà en el anuario de cada escuela.

Agrego que la elección de texto no es enteramente libre para la asamblea de profesores; esa elección debe hacerse sobre una lista aprobada por el consejo escolar provincial. La inscripción de un nuevo libro en la lista oficial sólo puede obtenerse a solicitud de cuatro escuelas secundarias de la provincia.

En fin, cuando la asamblea de profesores ha escogido una obra, no puede elegir otra sino después de cierto tiempo, en Baviera después de cinco años.

XVI

Los ejercicios del método heurístico

El estudio de los ejercicios hechos en clase y de los deberes se relaciona naturalmente al método de enseñanza, sobre todo cuando se trata del heurístico, el cual puede decirse que en parte consiste en desarrollar la enseñanza partiendo de los ejercicios.

Es muy cierto, en efecto, que razonablemente no se puede ensayar el hacer descubrir a los alumnos las exposiciones sintéticas tales como habitualmente se encuentran en nuestros textos. Un alumno a quien se pidiera resolver la ecuación general

$$a x^2 + b x + c = 0$$

no encontraría nada absolutamente.

Otra cosa sería si se le hiciera resolver sucesivamente las ecuaciones

$$x^2 = 4 \; ; \; (x - 1)^2 = 4 \; ; \; x^2 - 2x + 1 = 4 \; ;$$
$$x^2 - 2x = 3 \text{ y en fin } x^2 - 2x - 3 = 0$$

Si entonces se le hace volver sobre la serie de los ejemplos para que se penetre del espíritu del método, no tendrá ninguna dificultad para aplicarlo a otros ejemplos numéricos:

$$x^7 - 6x + 8 = 0 \; ; \; x^7 - 2mx + 3 = 0$$

y finalmente a la ecuación general de segundo grado.

Los ejercicios así empleados no son ejercicios de aplicación, sino ejercicios de descubrimiento; constituyen una aplicación del método inductivo a las matemáticas.

Puede así suceder que un teorema clásico sólo sea establecido cuando se le necesita para resolver un ejercicio particular.

He visto, por ejemplo, en una escuela industrial de Baviera interrumpir la resolución del problema:

«Encontrar la duración de las pequeñas oscilaciones de un disco circular de radio r, que gira alrededor de un eje A paralelo a su eje de revolución», para demostrar el siguiente teorema:

«El momento de inercia de un cuerpo con relación a un eje cualquiera es igual a su momento de inercia con relación al eje paralelo trazado por el centro de gravedad, aumentado del producto de la masa total por el cua drado de la distancia de los dos ejes».

De esta manera, el enunciado clásico no es obtenido á lo imprevisto y sin que se sepa para que sirve; la enseñanza no es abstracta, tiene su base en la realidad. Evidentemente es preciso tener cuidado de que los teoremas fundamentales no dejen de aparecer encadenados y que los ejercicios auxiliares no ahoguen la teoría general; es necesario saber hacer caer el andamiaje para mostrar el edificio construído. Es en esa parte de la enseñanza que el texto puede auxiliar poderosamente y que su rol es considerable: el libro debe hacer la síntesis de la enseñanza oral.

La misma tendencia conduce a transformar los enunciados de teoremas en problemas. En lugar de:

Si por un punto A se trazan dos rectas A B y A C paralelas a un plano P, el plano B A C es paralelo al plano P, se dice más bien:

Trazar por un punto A un plano paralelo al plano P.

Ciertas enseñanzas son, de este modo, enteramente desarrolladas por medio de ejercicios. Tal ocurre para el cálculo, la aritmética y el álgebra. Me ha sorprendido el comprobar que, en la mayor parte de los establecimientos, los alumnos no tienen texto de álgebra y que sólo se les da una enseñanza teórica muy rudimentaria: la. *Colección de ejercicios* es la base de la enseñanza del cálculo y del álgebra y se considera suficiente.

Los ejercicios de aplicación.—Se da á los ejercicios una

importancia considerable. En cuanto he podido apreciar el tiempo que se les consagra, solamente en clase, es el doble del que se asigna a la enseñanza teórica; he asistido a clases exclusivamente dedicadas a los ejercicios de aplicación. Ningún tema es abandonado antes de que se haya comprendido perfectamente mediante la ejecución de numerosos ejercicios de aplicación.

Así, la *Colección de ejercicios* es uno de los libros más empleados en Alemania y que constantemente utilizan los alumnos. Esas colecciones, abundantes en ejercicios variados, dispuestos en una progresión conveniente, prestan grandes servicios a los profesores y a los alumnos: a los primeros, por que están seguros de encontrar los ejercicios que convienen a la ilustración de todos los capítulos de su enseñanza; y a los últimos por que les ahorra el tiempo de copiar y los errores consiguientes.

En esas Colecciones de ejercicios aparece también muy netamente la característica de la enseñanza alemana de dirigirse a la masa de los alumnos, y, por lo tanto, de buscar de no poner en juego más que las cualidades medianas. Los problemas contenidos en esas Colecciones, los que se resuelven en clase, los que se proponen como deberes, son, en efecto, los más fáciles. Tienen por objeto único, la asimilación de la enseñanza teórica, no exigen más que la aplicación de lo que ha sido enseñado y no piden ninguna facultad de invención. Nuestros buenos alumnos encontrarían en esas colecciones alemanas pocos problemas susceptibles de interesarles.

El profesor Reidt explica de una manera muy precisa el rol que desempeñan los ejercicios en la enseñanza alemana:

«El trabajo á domicilio debe consistir, no solamente en la repetición de las cuestiones resueltas en la clase, sino también en la resolución personal de nuevos problemas; pero, estos últimos, deben ser preparados de modo que todo alumno, que no sea completamente negligente, perciba claramente la marcha que debe seguir

para llegar a la solución, y que no esté obligado, por falta de una idea feliz, a acudir a un auxilio extraño. La actividad independiente del alumno mediano nunca debe consistir en el descubrimiento de ideas nuevas y personales, sino solamente en la aplicación de lo que ha aprendido a casos particulares. Deseamos, pues, que el problema dado como deber no contenga ninguna dificultad que la enseñanza no haya preparado á salvar con seguridad».

Agrega, además, el profesor Reidt:

«Los ejercicios propuestos no deben determinarse según la capacidad de los mejores alumnos de la clase, sino de acuerdo con la capacidad de los más débiles. Sin embargo, para que el interés de los mejores no decaiga, puede darse a escoger entre un cierto número de problemas, de modo que los alumnos más débiles resuelvan los más fáciles, y los alumnos mejor dotados resuelvan los más difíciles. En todo caso, la tarea dada como deber debe ser más bien moderada que considerable».

Consecuencia de esta manera de concebir el rol de los ejercicios es la importancia relativamente débil que en Alemania se da a los deberes escritos.

Con mucha frecuencia el trabajo escrito hecho á domicilio es solamente un complemento del trabajo hecho en clase. Por ejemplo, se da para terminar un problema empezado, poner en limpio un dibujo ejecutado en clase, hacer una aplicación numérica del curso, etc.

Los trabajos verdaderamente desligados de la enseñanza, análogos a los «deberes» franceses, son menos frecuentes: se dan solamente cada 15 días, y aún las *Consideraciones metódicas,* anexas al programa de matemáticas, aconsejan de no exigirlas más de una vez por mes en las clases superiores.

«El fin de esos ejercicios, dice Reidt, no es tanto el de aumentar los conocimientos, o de experimentar la capacidad del alumno, como de habituarlo a la corrección en la exposición matemática escrita. Para el pro-

greso de los conocimientos, los ejercicios mucho más numerosos y más variados, hechos en clase ó á domicilio, (se trata aquí de ejercicios muy fáciles, complementarios del trabajo de clase, de los cuales no se exige la redacción), son de importancia talmente mayor que, al lado de ellos, los ejercicios redactados («deberes») no tienen mayor valor. Estos últimos deben sobre todo tender a dar la precisión de estilo, la corrección en la escritura de las fórmulas y de los cálculos, la exactitud en la construcción de las figuras, de una manera general, el cuidado de la forma externa del trabajo».

Por último existe en la enseñanza alemana las *Extemporalien*, que son ejercicios hechos en clase, en un tiempo limitado, bajo la vigilancia del profesor. Son análogos a las *Composiciones* francesas, pero más frecuentes; como éstas, sirven para apreciar las capacidades de los alumnos, pero no se califican.

La relación que los ejercicios tienen con la enseñanza oral, la indica el profesor Reidt en los siguientes términos:

«No debe olvidarse que la enseñanza oral en matemáticas es siempre la más importante, pues por ella se obtienen los progresos, mientras que los trabajos escritos sirven solamente para consolidar lo que se ha aprendido, para ejercitar en el uso de una forma correcta, y para contralorear los conocimientos adquiridos: esos trabajos nunca deben tomar demasiada extensión en detrimento de la enseñanza oral».

XVII

LAS RELACIONES DE LAS ENSEÑANZAS DE LAS MATEMÁTICAS Y DE LA FÍSICA

En Prusia los profesores de las escuelas secundarias, en la parte científica de su examen de ingreso al profesorado, deben demostrar su capacidad para enseñar en

tres órdenes diferentes de conocimientos, los cuales deben ser agrupados según ciertas reglas bastante flexibles. En lo que se refiere a las matemáticas y a la física, los agrupamientos admitidos son: 1.º matemáticas puras y física, con una tercera ciencia cualquiera, por ejemplo las matemáticas aplicadas, o la química, o la botánica, etc.; 2.º física y química, con una tercera ciencia, botánica, zoología, geografía, etc. Agrego que el preferido es el primero de los grupos, en razón de que las matemáticas y la física ocupan en las escuelas secundarias mucho mayor lugar que la física y la química.

Resulta, pues, que en Prusia, un profesor no está autorizado para enseñar las matemáticas, si al mismo tiempo no lo está para enseñar la física.

Por consiguiente, las matemáticas y la física son con frecuencia enseñadas en la misma clase por el mismo profesor, de modo que la cuestión se plantea sobre las relaciones que deben existir entre las dos clases de enseñanza.

Ya he dicho que esas relaciones parecen antes haber sido establecidas en favor de las matemáticas y que los métodos y hasta el formulismo matemático habían con frecuencia alterado y desnaturalizado el pensamiento físico.

Una intensa reacción se ha iniciado hace alrededor de 15 años [1], al mismo tiempo que se producía el movimiento de las matemáticas hacia las aplicaciones, a que ya me he referido. Han sido propuestas soluciones extremas: la separación absoluta y aun la subordinación de las matemáticas de modo que sean ciencias auxiliares de la fisica. A mi parecer la opinión que actualmente se desprende de la experiencia y de la discusión es la siguiente:

La enseñanza de las matemáticas y de la física por el mismo profesor tiene desde luego, fuera de toda unión

---

(1) 1890.

más íntima, la ventaja de toda concentración de la enseñanza: el profesor, viendo con más frecuencia los mismos alumnos, los conoce mejor, tiene sobre ellos mayor influencia y dirige con más eficacia sus estudios.

Pero hay todavía otras ventajas referentes á las relaciones de ambas ciencias. La física y las matemáticas se penetran en muchos puntos y pueden prestarse mutuo auxilio: algunas de las más importantes nociones de matemáticas, aproximación, función, representación gráfica, derivada, integral, tienen su origen y sus más interesantes aplicaciones en el estudio de los fenómenos físicos; por otra parte, esas nociones hacen de las matemáticas el auxiliar indispensable de la física.

Es necesario, además, que en esta unión de las enseñanzas de la física y de las matemáticas, cada una de esas ciencias conserve su carácter, su objeto y sus métodos propios.

No hay, por lo tanto, porque exagerar la importancia de esas cuestiones de principio: en la práctica de la enseñanza alemana, el auxilio recíproco que se prestan las matemáticas y la física, consiste sobre todo en que, por una parte la física ofrece para las matemáticas la ocasión de aplicaciones que las aproximan de la realidad, y en que por otra parte, la resolución en las clases de matemáticas de los ejercicios de física que exigen desarrollos materiales un poco extensos, deja en las clases de física más tiempo para la difusión del pensamiento físico.

Estas razones explican cómo la unión de las enseñanzas de la física y de las matemáticas, que en Alemania remonta a la época en que se introdujo la física en las escuelas secundarias, y que ha experimentado favorablemente la prueba del tiempo, se haya hecho más extensa aún por el movimiento de las matemáticas hacia las aplicaciones que se ha producido desde 1890. Los programas prusianos de 1901 aconsejan esta unión, sobre todo en los Gimnasios; la he visto funcionar en las tres clases de

establecimientos y los profesores a quienes he hablado me han permitido muy frecuentemente comprobar el provecho mutuo que obtenían por la unión de ambas enseñanzas.

XVIII

CONCLUSIONES A QUE LLEGA EL PROFESOR MAROTTE

La mayor parte de lo que va expuesto sobre la enseñanza matemática en las escuelas secundarias de Alemania, lo he extractado del interesante informe del profesor Marotte, publicado en 1905 con el título *L'enseignement des sciences mathematiques et physiques dans l'enseignement secondaire des garçons en Allemagne.* Veamos ahora cómo expresa su opinión el distinguido profesor apreciando sintéticamente la enseñanza matemática alemana.

«Podemos ahora apreciar en su conjunto el método y el régimen de la enseñanza alemana, ver cuál es su acción sobre la masa y sobre los mejores alumnos, buscar en qué medida pone en juego su iniciativa y qué clase de formación les da.

Una primera observación muy importante, y que ya he tenido ocasión de expresar, es que el trabajo en clase tiene un rol mucho más importante que el trabajo a domicilio. Desde luego el tiempo consagrado a la clase es mayor en Alemania que en Francia. Además el trabajo en clase debe no solamente hacer comprender las nociones nuevas sino producir su asimilación: es en clase que los conocimientos se adquieren, bajo la dirección del profesor, cuya acción personal se hace sentir constantemente. El trabajo hecho aisladamente por el alumno en su casa es considerado como de importancia secundaria, como un simple complemento del trabajo de la clase.

La ventaja de esta manera de proceder, es que asi todos los alumnos marchan a la par y que la enseñanza se

dirige a la masa de los alumnos. Bajo la tutela del profesor que, no solamente les expone la ciencia, sino que les enseña cómo se aprende y por decirlo así, les mastica el trabajo, el alumno menos inteligente saca gran provecho de la enseñanza.

Pero, por otra parte, no es dudoso que la parte atribuida a la iniciativa, al trabajo personal, es menor en la enseñanza alemana que en la enseñanza francesa. El método heurístico tiene, sobre el método didáctico, la ventaja de dejar al alumno su actividad y una cierta parte de iniciativa, pero éstas sólo se ejercen en la vía marcada por el profesor. El profesor enseña como se hace la investigación, pero es él quien tiene la brújula y el plano del terreno que debe explorarse y da a cada instante la dirección. El esfuerzo personal no falta ciertamente al alumno, las respuestas a las cuestiones propuestas lo prueban; pero este esfuerzo no puede compararse al que tienen que hacer nuestros alumnos para resolver los ejercicios que les proponemos como deberes.

Por consiguiente, el desarrollo de las cualidades que crean en el alumno aislado la personalidad y la independencia, que distinguen tal alumno de una clase de su vecino, no es favorecido por la enseñanza alemana. No se da á los alumnos el conocimiento del método científico y la aptitud para manejarlo, sino algo como un traje de uniforme confortable, cómodo y útil, pero que poco tiene en cuenta las cualidades individuales. La enseñanza alemana forma más bien unidades que individuos.

En resumen, y concretando mis impresiones sobre la enseñanza alemana, encuentro excelente el trabajo en la clase. Esta *organización del trabajo en común* del método heurístico, en el cual se conserva la actividad del alumno, se tiene en cuenta su libertad, se asegura su participación efectiva en la enseñanza, en la cual, además, es colaborador del profesor, quien, mediante el cambio de ideas, hace un contralor permanente, me parece el mejor método de enseñanza elemental.

Pero, creo que si bien el profesor alemán enseña el método de investigación, no lo hace aplicar en un trabajo bastante independiente. El trabajo individual permanece demasiado descuidado en Alemania.

Sin dejar de aconsejar el empleo del método heurístico, deseo que nada se cambie en nuestro régimen de enseñanza. Por lo contrario, desearía que la importancia que se da al trabajo libre y espontáneo se aumente, y que el número de horas de clase se disminuya. »

XIX

LA ASOCIACIÓN DE LOS NATURALISTAS Y MÉDICOS ALEMANES. — SU ACCIÓN EN LAS REFORMAS DE LA ENSEÑANZA SECUNDARIA ALEMANA.

Esta Sociedad que cuenta con unos 700 socios, goza de gran prestigio en el profesorado aleman: en 1905 tuvo su 77.ª reunión en la pequeña ciudad de Meran, en la que al mismo tiempo realizaba su reunión anual el Congreso de matemáticos alemanes.

La Asociación de naturalistas y médicos alemanes, por medio de su comisión de enseñanza, ha tomado una parte muy activa en el estudio de las cuestiones de enseñanza secundaria, y tratándose de reformas de planes y programas de estudio no pueden dejar de tenerse en cuenta las llamadas *declaraciones de Meran*, que fueron aprobadas en el Congreso arriba mencionado.

Esas declaraciones fueron propuestas por una comisión que el Congreso anterior había designado para estudiar y tratar de realizar los proyectos de reforma de la enseñanza científica de las escuelas secundarias de acuerdo con las necesidades de la época y las exigencias de los estudios superiores.

El profesor Guztmer presentó un informe de conjunto sobre los trabajos de la Comisión, en el cual expresó las ideas directrices a que llegó la Comisión después de estudiar y discutir los diversos informes parciales. El in-

forme del profesor Guztmer tenía anexos tres informes: uno sobre *enseñanza de las matemáticas*, redactado por el profesor *Klein*, otro sobre la *enseñanza de la física*, del profesor *Poske*, y el tercero sobre la enseñanza de la *química y de las ciencias biológicas*, del profesor Fricke.

En resumen, las conclusiones que propuso la Comisión de enseñanza a la Asociación de naturalistas y médicos alemanes, y que ésta aprobó, fueron las siguientes:

1.º La Comisión estima, que es deseable que las escuelas secundarias superiores no den exclusivamente una cultura histórica y literaria o una cultura científica.

2.º Reconoce las ciencias matemáticas y naturales como equivalentes a las lenguas, por lo que se refiere a los medios propios para desarrollar la cultura general, y ella mantiene firme el principio de la cultura general específica.

3.º Estima que es necesario que los mismos derechos sean conferidos después de los exámenes finales de las diversas escuelas secundarias, (gimnasios, gimnasios reales, escuelas reales).

De los tres informes anexos al informe general, el que interesa al fin del presente libro es el siguiente, del ilustre profesor Klein, de notoria autoridad en Europa, digno presidente de la *Comisión internacional de enseñanza de las matemáticas.*

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LOS ESTABLECIMIENTOS SECUNDARIOS DE 9 CLASES

(Extracto del informe de la Comisión de Enseñanza de la Sociedad de naturalistas y médicos alemanes).

Los estudios matemáticos en los establecimientos secundarios y superiores requieren una cierta adaptación al fin moderno de la escuela: la dificultad de obtener esa adaptacion estriba más en el peso de la tradición de varios siglos que en las circunstancias exteriores.

El principio de esta adaptación no es dudoso; resulta

netamente de las observaciones metódicas de los programas prusianos de 1901: tiende de una parte (como en las demás ramas) a adaptar la enseñanza, más que en el pasado, a la marcha natural del desarrollo intelectual; a colocar los nuevos conocimientos en relación orgánica con la ciencia actual; en fin, a hacer cada vez más consciente la coordinación de la ciencia en sí y con las otras ramas de la escuela, de grado en grado. Además se tratará, sin dejar de reconocer el valor educativo de las matemáticas, de renunciar a todos los conocimientos especiales y prácticamente inútiles; y en cambio desarrollar lo más posible la facultad de observación matemática en el mundo de los fenómenos.

De aquí se desprenden dos fines principales: *el desarrollo de la intuición del espacio*, por una parte, y *la idea de función*, por la otra.

No se ocasiona ningún perjuicio a la educación lógica por el fin señalado a la enseñanza matemática, y aun puede decirse que ese fin gana por el desarrollo reforzado, en la dirección indicada de la enseñanza matemática, por el hecho de que las matemáticas se ponen en relación más estrecha con el dominio que interesa al alumno, y en el en el cual deberán ejercerse sus capacidades lógicas.

Tal es el principio: de acuerdo con él proponemos un proyecto de programa para los Gimnasios.

Hacemos notar de antemano los puntos siguientes:

1.º El hecho de que nuestro programa tiene en cuenta, en mayor medida que el precedente, puntos de vista generales ya citados, y desecha para éste una cierta cantidad de material poco útil: trae un *aligeramiento sensible* para la mayor parte de los alumnos, sobre todo alejando las nociones cuya introducción prematura despierta dudas en muchos de ellos sobre su éxito en el estudio de las matemáticas. Se dejan de lado todas las particularidades cuyo empleo inteligente supone una cierta rutina, tanto en el dominio de las transformaciones analíticas como en el de las construcciones geométricas. Por otra parte las concepciones

abstractas y las demostraciones que con tanta frecuencia son incomprensibles para el principiante, son llevadas a los grados superiores. Esto no perjudicará la seguridad en la aplicación de los conocimientos adquiridos o a la lógica del pensamiento matemático. De este punto de vista *el arte del maestro,* del cual no queremos restringir la iniciativa por prescripciones especiales, es de limitarse a lo que se puede exigir sin caer en la exageración.

2.º Recomendamos expresamente una *gran libertad del maestro,* para lo que es de elección particular, la presentación metódica, la repartición del trabajo, etc., (bien entendido en el cuadro del programa general). En nuestro proyecto subordinamos a esta libertad un punto particularmente importante sobre el cual las opiniones de los interesados no resultan bastante claras. Proponemos en nuestro proyecto (como una consecuencia de nuestro principio general) que se lleve la enseñanza en la 1.ª del Gimnasio, hasta el umbral del Cálculo Infinitesimal, pero nada especial hemos fijado sobre la forma de esta enseñanza. Una vez que se haya hecho la experiencia en diversos establecimientos podrá decidirse, con más certeza, como mejor pueda realizarse ese propósito.

3.º Como objeto final, la enseñanza matemática en *primera* (último año), comprende, en suma, los tres puntos siguientes:

Un golpe de vista sobre la afinidad de los temas matemáticos tratados en la Escuela;

Cierta aptitud para la concepción matemática, y su empleo en la resolución de problemas particulares.

En fin, y sobre todo, la penetración de la importancia de las matemáticas para el conocimiento exacto de la naturaleza.

De esta manera el alumno adquiere conocimientos matemáticos, no solamente preciosos por sí mismos, sino que forman al mismo tiempo una base práctica para todos aquellos a quienes son necesarios para su carrera particular. La *discontinuidad* que aparece con frecuencia cuando se pasa a los estudios superiores desaparece de hecho.

4.º Del punto de vista de la organización, emitimos el voto de que se derogue la reducción a 3 horas semanales solamente de la enseñanza matemática en las dos *terceras* clases del Gimnasio (4.º y 5.º años), que fué adoptada para asegurar más tiempo al Griego, reducción considerada desfavorable por todos los maestros. *En todas las clases del Gimnasio deberá asignarse 4 horas semanales a las matemáticas.*

En Prusia, en las escuelas reales superiores, las horas siguientes son actualmente asignadas a las matemáticas:

	VI	V	VI	IIIb	IIIa	IIb	IIa	Ib	Ia	Total horas semanales
Gimnasio real . . .	4	4	4	5	5	5	5	5	5	42
Escuela real superior.	5	5	6	6	5	5	5	5	5	47

Resulta de este cuadro que en los programas actuales se persigue, para esas dos clases de escuelas, una enseñanza matemática más elevada que en los gimnasios clásicos.

Para las ciencias naturales, en los gimnasios, se dedican en todas las clases 2 horas semanales, y en los gimnasios reales y escuelas reales, las horas semanales que indica el siguiente cuadro:

	VI	V	IV	IIIb	IIIa	IIb	IIa	Ib	Ia	Total horas semanales
Gimnasio real . . .	2	2	2	2	2	4	5	5	5	29
Escuela real. . . .	2	2	2	2	4	6	6	6	6	36

Considerando este hecho, la Comisión, a propuesta de sus miembros matemáticos, estima en cuanto a los gimnasios reales, en los cuales las circunstancias aparecen especialmente desfavorables al desarrollo reforzado de las ciencias naturales, que sería preferible renunciar al exce-

dente de las horas de matemáticas que se inicia en 3.ª inferior, es decir, ceder desde esa clase una hora a las ciencias naturales. Tendríamos así, en el gimnasio real, para todas sus 9 clases, 4 horas semanales de matemáticas, como se pide normalmente para el gimnasio, y se aplicaría a los gimnasios reales el programa de matemáticas votado para los gimnasios.

Las ciencias naturales obtendrían en el gimnasio real casi el mismo número de horas de que actualmente disponen en las escuelas reales, es decir:

	VI	V	IV	III b	III a	II b	II a	I b	I a	Total horas semanales
Gimnasio real . . .	2	2	2	3	3	5	6	6	6	36

Las dos escuelas deberán entonces buscar de obtener este aumento de tiempo acordado a las ciencias naturales mediante concesiones de otras ramas.

El excedente de horas en la enseñanza de las matemáticas sólo existiría en las escuelas reales. Según la opinión unánime de los miembros de la Comisión, ese excedente de horas debe dedicarse principalmente a dar un desarrolló más intenso de la misma materia *(matemáticas)* tratada en los gimnasios; por una parte, los principios generales serán puestos en evidencia de una manera particular, estableciéndolos con más firmeza, y por otra parte se concederá más amplitud a las aplicaciones prácticas y a las cuestiones gráficas. Una minoría de la Comisión quería limitar este cuadro de trabajo para esas escuelas.

PROGRAMA DE MATEMÁTICAS PARA LOS GIMNASIOS PROPUESTO POR LA COMISIÓN DE ENSEÑANZA DE LA SOCIEDAD DE NATURALISTAS Y MÉDICOS ALEMANES.

A — *Grados imperiales*

VI. (1.er año)—Operaciones fundamentales de cálculos con enteros, concretos o no, en un dominio limitado—Medidas alemanas, pesos y monedas—Ejercicios en notación decimal, y en cálculos decimales simples, como preparación al cálculo de las fracciones.

V. (2.o año)—Ejercicios progresivos sobre decimales concretos, ensanchando el dominio de las medidas especiales (pesos y monedas de países extranjeros); medidas de longitud de diversas especies; problemas simples sobre áreas y volúmenes, indicando la relación entre volúmenes y pesos. (En todos los cálculos es preciso siempre hacer prever aproximadamente la magnitud de los resultados).— Divisibilidad de los números.—Fracciones ordinarias (al principio con números concretos).

Preliminares sobre la estereometría — Introducción sobre las nociones fundamentales del espacio, tratando de que el espacio aparezca principalmente como base de relaciones planimétricas—Dimensiones del espacio, superficies, líneas, puntos, explicadas desde luego por las cosas que nos rodean, y aplicados a los sólidos más comunes y diversos—Figuras planas, consideradas desde luego como límites de los cuerpos, después en sí mismas, y sobre las cuales se explicará las nociones de dirección, ángulo, paralelismo, simetría—Ejercicio con la regla y el compás: uso continuo del dibujo y ejercicios de medida.

IV. (3.er año)—*Cálculo*—Cálculos con fracciones decimales — Cálculos abreviados — Reglas de tres, evitando todo exceso de formas esquemáticas — Problemas de la vida usual: casos simples de porcentaje (interés, descuento) — Preparación al Algebra por la exposición de problemas

apropiados ya tratados, empleando letras en lugar de números — Significación de expresiones literales dadas y cálculo de tales expresiones por sustituciones numéricas — Relaciones entre las reglas del cálculo mental y las del cálculo con paréntesis.

Geometría — Estudio de la recta, de los ángulos y de los triángulos — Desplazamiénto de las figuras; relación entre los elementos de un triángulo; casos límites (triángulos, rectángulos, isósceles, equiláteros — Teoremas simples sobre los paralelógramos, partiendo de su construcción.

III. Inferior (4.º año) — Aritmética — Revisión sistemática de las reglas fundamentales del cálculo por fórmulas literales — Noción de magnitud relativa, desarrollada sobre ejemplos prácticos y mostrada sobre una recta por la serie de los números extendida indefinidamente en ambos sentidos — Reglas para las magnitudes relativas — Series de ejercicios en el cálculo de expresiones literales en conexión con las magnitudes negativas y explicación constante del carácter funcional de las variaciones de magnitud empleadas — Aplicación a las ecuaciones y problemas de 1.er grado con una incógnita — Diferencia entre identidad y ecuación.

Geometría — Continuación del estudio del paralelógramo y trapecio — Teoremas fundamentales sobre el círculo — Consideración de la influencia ejercida sobre el carácter general de una figura por los cambios de magnitud y de posición de sus elementos — Aplicación constante a construcciones, con exclusión de los problemas solubles solamente por artificios.

III. Superior (5.º año) — Aritmética — Complementos y desarrollos sobre el cálculo literal, en particular descomposición de polinomios — Propiedades de las proporciones — Ecuaciones puras y problemas de 1.er grado con una o con varias incógnitas — Dependencia de la expresión de una magnitud con relación a una variable que ella encierra — Representación gráfica de funciones lineales y su empleo en la resolución de ecuaciones.

Geometría — Comparación de las áreas y su cálculo en relación con figuras limitadas por rectas complicadas: cálculo aproximado para superficies limitadas por curvas — Repetición de los cálculos de volúmen de la V — Problemas.

II. Inferior (6.º año) — Algebra — Potencias y raíces — Ecuaciones y problemas de 2.º grado con una incógnita — Relaciones entre los coeficientes y las raíces — Variaciones del trinomio de 2.º grado con representación gráfica — Resolucion de problemas de 2.º grado con una incógnita por intersección de rectas y de parábolas — Consideración de la representación gráfica como medio de poner en evidencia las relaciones empíricas dadas.

Geometría — Semejanza, insistiendo principalmente sobre la semejanza de posición — Líneas proporcionales en el círculo — Cálculos de valores aproximados de la circunferencia y del área del círculo por polígonos — Relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo, sobre todo de un triángulo rectángulo — Investigación y verificación de las tablas de esas relaciones (como preparación a la Trigonometría) con trabajos prácticos — Uso de la plancheta.

B — *Grados Superiores*

II. Superior (7.º año) — Algebra — Extensión de la noción de potencia, concepción de la potencia como magnitud exponencial, noción y empleo del logaritmo — Progresiones aritméticas y geométricas: empleo de las últimas para el cálculo de interés y rentas (en problemas simples tomados de la realidad) — Representación gráfica de la dependencia del número y del logaritmo — Regla de cálculo — Resolución de las ecuaciones cuadráticas con dos incógnitas, por el cálculo y gráficamente.

Geometría — Trigonometría en relación con las construcciones planimétricas — Aplicación a los problemas usuales de la medida de los triángulos y cuadriláteros — Depen-

dencia recíproca entre los ángulos y las fracciones por las fórmulas goniométricas — Representación gráfica de esas funciones — Problemas apropiados, construcción y cálculo — Divisiones y relaciones armónicas y nociones fundamentales destinadas a preparar (como fin de la planimetría) a la Geometría moderna.

I. Inferior (8.º año) — Algebra — Estudio razonado de las funciones, tratadas considerando su crecimiento y decrecimiento (utilizando eventualmente las nociones de derivada y de integral); aplicación a numerosos ejemplos de Geometría y de Física, particularmente en Mecánica — Teoremas principales, los más simples del análisis combinatorio, con ejemplos.

Geometría — Estereotomía teniendo en cuenta las principales nociones de la proyección de una figura — Ejercicios de dibujo estereométrico — Teoremas simples de la Trigonometría esférica — Geografía matemática, teoría de la proyección de cartas.

I. Superior (9.º año) — 1.º Secciones cónicas, tratadas analíticamente y sintéticamente, con aplicación a los elementos de la astronomía.

2.º Repetición sobre el conjunto de la enseñanza, o si fuera posible, se hará resolver problemas más importantes por medio del cálculo y gráficamente.

3.º Mirada general retrospectiva, con consideraciones históricas y filosóficas.

INFORMACIONES SOBRE EL PROYECTO

1.º *En la enseñanza del cálculo*, en las clases inferiores, el dominio de los números a utilizarse en los ejemplos debe ser limitado, evitando utilizar números superiores a 100.000. Se dedicará gran cuidado al cálculo mental. Para las aplicaciones de las medidas, monedas y pesos, tener preferencia por las condiciones usuales: los problemas de la vida corriente deben tratar cuestiones reales y no pro-

blemas ficticios que no ocurran jamás. Con frecuencia la enseñanza del cálculo se transforma en enseñanza especial, pero nunca debe exceder de la que en general se exige a un adulto instruído. Por otra parte la enseñanza del cálculo debe ser considerada como preparación a la aritmética y al álgebra. Se deberá, pues, tener muy en cuenta la distinción de los grados y su coordinación. Igualmente hay que dar importancia a una notación a la vez buena y lógica. Esta no debe estar en contradicción con lo que más tarde se use en la enseñanza matemática — En cada establecimiento un matemático influyente o una conferencia de maestros deberá intervenir en ese sentido.

La *enseñanza geométrica* debe ligarse de una manera natural a la intuición y partir de medidas prácticas. Habrá que evitar cuidadosamente oscurecer por una demostración sistemática pedante la comprensión de hechos que parecen evidentes a la intuición; en vez de demostración lógica vale más tratar desde luego de que los alumnos sean conscientes de nociones aceptadas espontáneamente por el espíritu. Por ejemplo, la igualdad de las figuras se deducirá como consecuencia natural de la construcción que sólo suministre una sola solución.

Las demostraciones indirectas deben evitarse todo lo posible: tratar como evidente la recíproca de las relaciones demostradas directamente, en tanto que (como es el caso más frecuente) ella así se imponga al espíritu.

En el dibujo la claridad debe favorecerse lo más posible (empleo de rayado, de colores); toda complicación por hechos secundarios debe evitarse, lo mismo que notaciones poco conocidas.

En las consideraciones planimétricas, aclarar en lo posible las relaciones con el espacio de tres dimensiones, utilizando ejemplos tomados principalmente de la realidad. Se recomienda el empleo de modelos.

2.º En los grados medios la aritmética es reemplazada por el álgebra, que, en el final de IV se prepara por la exposición metódica de toda la enseñanza preliminar del

cálculo y por la formación de cierta práctica en el empleo de las letras: debe evitarse todo pedantismo en la exposición sistemática de la aritmética, en la que con frecuencia hay que temer que un círculo vicioso venga a disimular la demostración. Por lo contrario, los teoremas del Algebra teórica deben tratarse como concepción científica de lo que ya fuertemente se ha presentido. Del mismo modo la introducción de los números negativos debe partir de ejemplos tomados de la práctica; la representación de los números sobre una recta debe tratarse como representación visual de los conocimientos adquiridos, de modo que las reglas con las cantidades relativas se presenten como generalizaciones naturales de las operaciones sobre valores absolutos. Deben evitarse todas las operaciones artificiales, divisiones de polinomios complicados, etc.; por lo contrario conviene insistir sobre la descomposición de los polinomios (extracciones de raíces cuadradas como temas de ejercicio); para las proporciones no retener más que las relaciones elementales, pero dominar la noción de proporcionalidad directa e inversa.

De esta manera queda tiempo para dedicarlo a la parte principal del trabajo: familiarizar al alumno con la idea de función, a la cual ya estará preparado por el estudio preliminar del Algebra al fin del grado IV, puesto que la variación de las expresiones algebraicas, resultantes de la sustitución de diferentes valores en las diversas magnitudes, se impone por sí misma.

El hábito de hacer intervenir la idea de función debe también ejercitarse en Geometría, por la consideración continua de las modificaciones que la cuestión que se trate experimente por cambios de longitud y de posición; por ejemplo, la variación de forma de los cuadriláteros, variación de posición relativa de dos círculos, etc. Pero al mismo tiempo el examen de las relaciones encontradas, que pueden agruparse según diversos puntos de vista, constituyen un excelente medio de educación del pensamiento lógico, del cual se hará uso con la mayor frecuencia

posible; igualmente por la consideración de los casos de transición y la noción del límite. Para alcanzar este objeto debe excluirse del programa actual más de un punto de detalle, y sólo pasar ligeramente sobre una gran cantidad de asuntos; en particular, la extensión de los teoremas establecidos para las relaciones racionales sólo debe hacerse prácticamente al caso de los números irracionales, es decir, indicando la posibilidad de hacer tan pequeño como se quiera el error cometido al sustituir números irracionales por racionales.

Las construcciones deben desarrollarse sólo en relación íntima con la enseñanza apropiada; en el análisis, conviene sobre todo velar sobre la marcha de las ideas por las cuales se llega a la solución, es decir, que el análisis debe ser conducido psicológicamente; debe también darse gran importancia al hábito del pensamiento funcional (los casos límites deben discutirse especialmente).

En esa oportunidad, será además necesario ligar las matemáticas a la construcción geométrica, sea por la introducción de la representación gráfica, sea experimentando las relaciones recíprocas entre líneas y ángulos.

3.º Por lo que respecta a los grados o clases superiores (II superior, I inferior y I superior) nos limitamos a algunas observaciones.

En la enseñanza de II superior la extensión de la noción de potencia, por la introducción de los exponentes negativos y fraccionarios, debe realizarse de una manera esencialmente funcional, lo que ofrecerá la ocasión directa de poner en estrecha relación las progresiones aritméticas y las geométricas.

En la Trigonometría se dejarán de lado todas las transformaciones artificiales para dejar sitio, por una parte, a las aplicaciones prácticas, y por la otra, a la concepción funcional de los elementos fundamentales.

Se emplearán modelos, terminando la planimetría por la Trigonometría con auxilio de problemas escogidos de una manera racional: debe insistirse principalmente sobre la diferencia entre relaciones de posición y las de medida.

En lo referente a la introducción del cálculo infinitesimal en la I inferior, la Comisión sólo la ha considerado como eventual, no estando todavía definidas las opiniones sobre la forma de realizar esa introducción. La Comisión aplaza la decisión sobre este punto, dejándola entretanto a la consideración de los profesores. Es claro que sólo deben tratarse problemas elementales de diferenciación y de integración.

La introducción de problemas de física, principalmente de mecánica, no sólo tiene en vista la unión muy deseable del pensamiento matemático y del físico, sino que también permite descargar la enseñanza de la física, que sólo dispone de tiempo limitado.

En la Estereometría, la aplicación del cálculo de las fórmulas de los volúmenes debe limitarse al provecho de ese método basado principalmente en la intuición del espacio, poniendo de relieve los principios importantes de la Geometría descriptiva. Se recomienda no descuidar los ejercicios de construcciones geométricas simples, en los cuales se dará importancia a su buena ejecución gráfica.

Se buscará también la oportunidad de tratar nuevamente capítulos ya vistos de la planimetría (semejanza, relaciones armónicas, estableciendo sus principios por un método estereométrico.

El estudio de las cónicas en I superior debe tener en cuenta, lo más posible, el lado analítico, como el sintético del asunto.

Se recomienda en Geometría sintética mucho dibujo, a fin de hacer resaltar la relación de forma entre las cónicas y el cono, la dependencia de la posición del plano secante, la relación de posición de los focos y directrices. Los casos límites merecen también una atención particular.

La Geografía matemática (en I inferior) y los elementos de la Astronomía se ligan a las partes correspondientes de la enseñanza de la Física.

En el examen de madurez se reconocerá con más se-

guridad el desarrollo matemático del alumno, y su influencia sobre su desarrollo mental general, cuando se exija, en lugar de la resolución de 4 problemas particulares, como ahora, por una parte el estudio de un tema general, y por la otra el estudio completo (cálculo y dibujo) de un problema.

Del mismo modo, en el examen oral habría que dar más peso a la inteligencia que a la memoriación de un gran número de fórmulas.

XX

ENSEÑANZA MODERNA DE LAS MATEMÁTICAS ELEMENTALES

Terminaré lo que se refiere a la enseñanza de las matemáticas en las escuelas secundarias de Alemania, con la transcripción de algunas de las ideas emitidas por diversos profesores alemanes en trabajos que presentaron a la Comisión internacional de enseñanza de las matemática.

De la gran cantidad de trabajos presentados me limitaré a considerar los que más directamente pueden interesar a nuestros profesores de enseñanza secundaria: las ideas que expresan los autores de esos trabajos aclaran mucho el concepto de los métodos que rigen en la enseñanza moderna de las matemáticas, no sólo en Alemania, sino en casi todos los países europeos.

Los extractos que van a continuación se publicaron por *L'enseignement mathematique.*

LAS ESCUELAS SECUNDARIAS SUPERIORES DE VARONES EN PRUSIA, POR EL DOCTOR W. LIETZMANN

Esta memoria contiene 204 páginas, y su autor expone en ella la organización actual, interior y exterior, de la enseñanza matemática en las escuelas secundarias prusianas. El profesor Lietzmann publicó su interesante me-

moria después de haber visitado los principales establecimientos escolares prusianos, habiendo asistido a las lecciones y obtenido todos los informes necesarios.

El trabajo del doctor Lietzmann está dividido en tres partes: La primera trata de la *organización general de la enseñanza en las escuelas secundarias superiores de varones:* la segunda se ocupa de los *planes de estudio* y de los temas referentes a la enseñanza matemática, y la tercera de la *influencia del movimiento de reforma sobre dos planes de estudio.*

Existen en Prusia tres clases de escuelas secundarias superiores: los *Gimnasios*, los *Gimnasios reales* y las *Escuelas reales superiores.* Además de esos establecimientos completos, que comprenden nueve clases, existen otros incompletos que sólo tienen las seis primeras clases: los *Pro-gimmasios,* los *Pro-gimnasios reales* y las *Escuelas reales.*

En un resumen histórico el autor indica las transformaciones progresivas que han experimentado las escuelas prusianas antes de llegar a su estado actual. Notamos solamente un hecho importante: la igualdad de las tres clases de escuelas en lo que se refiere a los derechos que acuerdan sus estudios.

El cuadro siguiente permitirá comparar el sistema de clases de las escuelas con el de los otros países:

Prusia		Austria		Francia		Italia		Estados Unidos	
Tres clases preparatorias		Cuatro clases preparatorias		División Prepar.ª 1.er año » » 2.º año Octava clase Séptima clase		Tres clases preparatorias		1.er grado 2.º » 3.º » 4.º » 5.º » 6.º » 7.º »	Escuelas comunes
Grados inferiores	VI V IV III inferior III superior II inferior	Grados infer.s	I II III IV	Sexta clase Quinta » Cuarta »	Primer Ciclo	I II III IV V	Gimnasio		
Grad.s sup.s	II superior I inferior I superior	Grados sup.s	V VI VII VIII	Tercera » Seguuda » Primera » Filosof. o Matemat.	Segundo Ciclo	I II III	Liceo	1.er año 2.º año 3.º » 4.º »	Esc.s sec.s

Los caracteres que distinguen los *Gimnasios*, *Gimnasios reales* y *Escuelas reales superiores* son los siguientes:

El Gimnasio se caracteriza por la enseñanza del latín y del griego. Entre las lenguas modernas sólo el francés es obligatorio; actualmente en los grados superiores es reemplazado con frecuencia por el inglés. A partir de *Segunda Superior* dos horas facultativas de inglés (o francés cuando el inglés es obligatorio) e igualmente el hebreo.

En el *Gimnasio real* sólo se conserva el latín como lengua muerta, siendo obligatorios el francés y el inglés. Las matemáticas y las ciencias naturales están mejor representadas que en el *Gimnasio*. El dibujo lineal es facultativo (dos horas semanales en las cinco últimas clases).

En las Escuelas reales superiores, no existen las lenguas muertas como materias obligatorias, siendo facultativo el latín en muchos de esos establecimientos, en los tres últimos años. En cambio, las lenguas modernas, las matemáticas y las ciencias naturales se profundizan más que en los *Gimnasios reales.*

Además de los establecimientos mencionados deben citarse las *Escuelas reformadas* en las cuales la separación se lleva más adelante.

En los capítulos siguientes, el autor se ocupa de la organización más libre de la enseñanza en los grados superiores, en lo referente a la extensión y a los métodos. Despúes pasa en revista el material escolar de que disponen los alumnos en sus estudios matemáticos y llega enseguida a la enseñanza matemática propiamente dicha. El profesor de matemáticas enseña con frecuencia otras ramas, especialmente las ciencias naturales. Se acostumbra actualmente distinguir dos grupos en las ciencias matemáticas y naturales: matemáticas, física y química-biología. Actualmente se confía casi siempre la enseñanza matemática y física al mismo profesor, y en todos los casos en las clases superiores.

Respecto de los métodos de enseñanza hay que distin-

guir el método heurístico y el método dogmático. El método heurístico, en su sentido más general, consiste en una asimilación progresiva de la materia de enseñanza por un cambio continuo de preguntas y respuestas entre el profesor y el alumno: es el procedimiento que se emplea casi siempre. En un sentido más restringido, el método heurístico, llamado de « redescubrimiento » en Francia, consiste en hacer que el alumno vuelva a encontrar por sí mismo los resultados de la enseñanza. En Alemania se emplea también este método.

Se da relativamente menos importancia a los trabajos hechos a domicilio que a los que se hacen en la clase: no tienen otro fin que la revisión y las aplicaciones de los temas tratados en las lecciones.

Además de esas tareas regulares hay que señalar trabajos más considerables que los alumnos deben presentar a intervalos de tiempo más largos, cada cuatro semanas, según los planes de estudio; e igualmente los trabajos facultativos. Estos últimos necesitarían una biblioteca para los alumnos, que con frecuencia no existe.

En la *segunda parte*, el autor se ocupa de los planes de estudio y de la materia de enseñanza. En un resumen histórico pasa en revista las transformaciones sucesivas de esos planes de estudio hasta los de 1901, actualmente vigentes. En los capítulos siguientes se encontrarán informaciones detalladas sobre estos últimos y sobre las observaciones a ellos anexos, y referentes a los métodos de enseñanza. Esos planes de estudio de 1901 comprenden tres partes: la primera es el horario; la segunda, que se ocupa especialmente de cada rama, indica también el campo respectivo de los tres tipos de escuelas secundarias (esta parte da igualmente observaciones metódicas sobre las matemáticas); la tercera parte contiene observaciones de carácter general.

Véase a continuación el esquema de los planes de estudio para los tres tipos de escuelas secundarias:

GIMNASIO

CLASE	ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA	GEOMETRÍA
VI V IV	Cálculo: las operaciones con los números positivos, enteros y fraccionarios. Operaciones usuales de la vida práctica.	— — Enseñanza preparatoria. Estudio de las rectas, ángulos y triángulos.
VIII	Cálculo: operaciones con números positivos y negativos: ecuaciones de primer grado.	Extensión del estudio del triángulo. Cuadrilátero Circulo (cuerdas y ángulos).
OIII	Proporciones: ecuaciones de primer grado con una ó con varias incógnitas. Potencias con exponentes enteros y positivos.	Medida de las áreas.
VII	Potencias, raíces y logaritmos (4 ó 5 decimales). Ecuaciones simples de segundo grado con una incógnita.	Semejanza. Cálculos relativos al círculo.
OII	Ecuaciones, principalmente de segundo grado, con varias incógnitas.	Divisiones y haces armónicos. Transversales. Geometría algebraica. Goniometría: cálculos trigonométricos simples.
VI y OI	Progresiones aritméticas y progresiones geométricas; cálculos de intereses compuestos y de rentas. Análisis combinatario (con cálculo de probabilidades). Binomio con exponentes enteros y positivos. Revisión de la aritmética. Ecuaciones de grado superior reducibles á las de segundo grado.	Extensión de las construcciones de geometria plana y de los cálculos trigonométricos. Geometria del espacio y sus aplicaciones á la cosmografía. Dibujos perspectivos de formas del espacio. Noción de coordenadas (con aplicación á las secciones cónicas).

GIMNASIO REAL Y ESCUELA REAL SUPERIOR

CLASE	ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA	GEOMETRÍA
VI V	Cálculo: números positivos enteros y fraccionarios, particularmente números decimales. Operaciones de la vida práctica.	— * Enseñanza preparatoria.
IV	Continuación del programa precedente. * Principios de cálculo algebraico.	Rectas y ángulos; triángulos; * cuadriláteros.
VIII	Operaciones usuales de la vida práctica y comercial. Cálculo algebraico; proporciones. Ecuaciones de primer grado con una incógnita.	Cuadriláteros: circulo. Medida de las áreas.
OIII	Potencias y raíces. Ecuaciones de primer grado con varias incógnitas. Ecuaciones simples de segundo grado.	Semejanza. Problemas del círculo.
VII	Logaritmos. Ecuaciones de segundo grado.	Elementos de trigonometría. Elementos de geometría del espacio; proyección paralela oblicua. Geometría algebraica.
OII	Progresiones aritméticas y geométricas (intereses compuestos y rentas). Números complejos. Ecuaciones recíprocas y binomios; ecuaciones difíciles de segundo grado.	Divisiones y haces armónicos; eje radical; centro de semejanza, etc. Continuación de la trigonometría. Geometría del espacio.
VI y OI	Análisis combinatorio (con aplicación al cálculo de probabilidades). Binomio para exponentes cualesquiera. Las series más importantes del análisis algebraico. Revisión de la aritmética. Ecuaciones de tercer grado. Máximos y mínimos.	Trigonometría esférica (cosmografía). Geometría descriptiva. Geometría sintética de las secciones cónicas. Geometría analítica plana.

Los temas señalados con asterístico se tratan en las Escuelas reales superiores, pero no en los Gimnasios reales.

En la tercera parte de su trabajo el profesor Lietzmann trata de la influencia del movimiento de reforma sobre los planes de estudio. En lo concerniente a la enseñanza matemática, este movimiento de reforma encuentra su mejor expresión en las declaraciones de Meran y de Stuttgart, de la Comisión de enseñanza instituída por la Sociedad de naturalistas y médicos alemanes. En esas proposiciones, se encaran, como fines principales de enseñanza en las escuelas superiores, los dos puntos siguientes:

a) el refuerzo de la concepción del espacio;

b) el desarrollo de la idea de función.

Para conformarse a esta manera de encarar las cosas, será necesario:

1.º Ordenar la enseñanza de modo que se adapte mejor al desarrollo natural del espíritu. Este principio psicológico se refiere principalmente a la enseñanza preparatoria de la aritmética y de la geometría y al pasaje progresivo de los procedimientos intuitivos a los procedimientos deductivos.

2.º Desarrollar en lo posible la facultad de observación matemática de los fenómenos que nos rodean. Este principio utilitario se manifestará por la elección apropiada de las aplicaciones.

3.º Llegar poco a poco a la concepción de la unidad de la ciencia. Este principio didáctico conducirá a una concentración de toda la enseñanza alrededor de una noción fundamental, la de función, tanto del punto de vista algebraico como del punto de vista geométrico:

Se encontrará en esta tercera parte de la obra del profesor Lietzmann el lugar que ocupa la noción de función en los grados inferiores de los diferentes establecimientos escolares. Sin entrar en detalles, podemos, sin embargo, decir que las disposiciones de 3 de Febrero de

1910 referentes a la nueva organización de las escuelas medias de Prusia son favorables al desarrollo de la noción de función.

Los últimos capítulos están consagrados al rol del cálculo infinitesimal en las escuelas superiores y a sus aplicaciones. En este caso, lo mismo que en el de la noción de función, el rol varía mucho de un establecimiento a otro. Actualmente el número de Gimnasios que llevan la noción de función hasta un estudio detallado del cálculo infinitesimal es muy restringido. En los establecimientos en los cuales se utiliza la noción del cociente diferencial, ésta se limita a funciones algebraicas muy simples y a algunas funciones trascendentes; generalmente no se aborda el cálculo integral o bien sólo se hace de él una iniciación. En cambio más del 50 o/o de las *Escuelas reales superiores*, comprenden en sus programas el cálculo diferencial, estando el integral mejor representado que en los *Gimnasios. Los Gimnasios reales,* tienen un lugar intermedio entre los *Gimnasios* y las *Escuelas reales superiores*, aproximándose más a éstos.

No es dudoso, dice el autor al terminar, que los próximos planes de estudio de las escuelas secundarias superiores de varones responderán todavía más favorablemente a las tendencias actuales de la reforma.

Los problemas comerciales y la enseñanza de las matemáticas en las escuelas secundarias—por el doctor H. E. Timerding.—Profesor de la Escuela Técnica superior de Braunsweig. (1)

Toda la enseñanza depende del fin que se asigna a la escuela: Unos quieren que por una gimnasia intelectual intensa ella habitúe el espíritu a pensar bien y temen todas las cuestiones prácticas que complican demasiado las contingencias de la vida para que sean un buen ali-

(1) Nota bibliográfica del profesor Dumas, de Berna.

mento del pensamiento: Los otros defendiéndose de los espíritus demasiado lógicos, desean, por lo contrario que la escuela inculque conocimientos precisos a sus alumnos y los ponga en contacto con la complejidad de las cosas.

El profesor Timerding no piensa en decidir el debate; hace notar que la aritmética política ofrece los elementos de un compromiso. Por su faz matemática, ella desarrolla la lógica formal y el razonamiento abstracto: trata, por otra parte, de cuestiones de las cuales se ocupan diariamente los hombres de negocios, y que no deben ignorarse bajo pena de ser extraños a la vida.

El autor divide en tres grupos los problemas de la aritmética política. En el primero coloca los que tienen su origen en el comercio de las mercaderías; son los principales los que se refieren a los precios de costo y de venta. Para resolverlos bastan las operaciones más simples; pero hay que tener en cuenta comisiones, provisiones y gastos diversos, que su ubicación corresponde principalmente a las escuelas de comercio.

Los problemas que se relacionan con el dinero forman el segundo grupo; son de mucho mayor importancia matemática que los precedentes y contribuyen mucho más a la cultura general. Es aquí que se aprenderá lo que es la moneda, cual es su titulo, cuales son los principales sistemas monetarios y como se pasa de uno a otro. Después vendrán los cálculos de intereses simples y compuestos, de vencimiento medio, etc. Avanzando más se muestra como se llega a los logaritmos naturales, suponiendo en los cálculos de intereses compuestos, que el períódo de capitalización se hace infinitamente pequeño Es esta una excelente ocasión de llamar la atención de los alumnos sobre el hecho de que las nociones matemáticas no son arbitrarias, sino que a ellas conduce la fuerza de las cosas.

Es en ese mismo grupo que se haría figurar las operaciones de bolsa, los cambios y los arbitrages. El profesor Timerding no se ocupa de ellos, seguramente por te-

mor de invadir el campo de la enseñanza profesional; pero ha considerado que es conveniente poner en guardia a los jóvenes contra la especulación, y que un buen medio de desviarlos de ella es demostrarles que el juego no es equitativo, sino que sólo es ventajoso para los financistas bastantes fuertes para hacer la bolsa.

Los problemas del tercer grupo, los que se encuentran en la estadística y en los seguros sobre la vida, son sensiblemente más difíciles, y puede preguntarse, con el profesor Timerding, si no son demasiado elevados para la enseñanza secundaria. Hay que hacerlos preceder por algunas nociones del cálculo de probabilidades; los elementos son fáciles, a menos que no se quiera exceder de los ejercicios que corresponden al análisis combinatorio; en tal caso, pronto se encuentra obstáculo en las dificultades de las nociones, sin embargo fundamentales, de dispersión y de ley de los errores.

¿Qué debe decir el profesor de la esperanza moral? Como todos los temas en los cuales la verdad y el error están estrechamente unidos, su estudio puede llegar a ser muy instructivo: él permitirá fácilmente comprender porqué el juego, que tiene por base la ganancia, jamás es ventajoso, mientras que los seguros, que deben preservarnos de una pérdida, lo son. Esas ventajas compensan mal, según el profesor Timerding, los defectos de la esperanza moral, y así considera que el profesor debe introducir esta noción con prudencia. Iríamos más lejos: la noción de esperanza moral tiene dos grandes defectos: primeramente ella es precisa por demás; la satisfacción de poseer crece más lentamente que la fortuna, pero nada prueba que ella varíe como un logaritmo más bien que según cualquiera otra ley. Estamos en presencia de un error muy difundido: se imagina demostrar alguna cosa poniendo una ley complicada y mal conocida bajo una forma analítica simple y no se trata de verificar si los hechos concuerdan con la fórmula inventada. El segundo defecto es que todo se puede probar por medio de hipó-

tesis de esta naturaleza: las matemáticas, arriesgan, pues, perder en tal caso la confianza que inspiran a cualquiera, pues sólo los espíritus advertidos se darán cuenta del abuso. Creemos, por lo tanto, que no hay que hablar de esperanza moral en las escuelas secundarias, sino a condición de tener la posibilidad de someterla a una crítica muy estricta, y la certeza de que esta crítica sea comprendida.

La estadística es un dominio muy difícil, porque exige una gran cultura general; pero justamente porque ella se relaciona con todos los sujetos, es que se presta á numerosos desarrollos. Los ejemplos sencillos, no faltan en ella: ellos permitirán mostrar a los jóvenes en qué consiste uno de nuestros principales métodos de investigación y de demostración. La mayor parte de los hombres cultivados no tienen de ella la menor idea: deducen de las estadísticas las consecuencias más absurdas por no saber qne un número sólo contiene lo que en él se ha puesto. Para ellos la estadística no es más que un objeto de burla; sin embargo la hacen todos los días.

El seguro de vida está en contacto íntimo con la realidad: ilustra los beneficios de la asociación; la comparación de las diversas combinaciones llama la atención de los jóvenes sobre los elementos que deben tenerse en cuenta para juzgar un negocio. Los seguros no ofrecen grandes dificultades para buenos alumnos: el cálculo de las reservas exige atención y sagacidad, pero, fuera de que debe comprender la verdadera naturaleza del seguro da un buen ejemplo de una función de varios variables. Si esas materias hubieran figurado desde hace cincuenta años en nuestros programas no veríamos tanta gente que, consagrando al seguro la totalidad de sus economías, pagan a ojos cerrados, por incapacidad de estimar, aun aproximadamente, el valor venal de una póliza. Tampoco veríamos ir a la bancarrota tantas sociedades de socorros mútuos.

Para indicar lo que es la enseñanza de la aritmética

política, el profesor Timerding analiza los principales textos alemanes. Sabe perfectamene que lo que importa no es el texto, sino el uso que de él se hace; sin embargo, su método le permite reconocer las tendencias de la enseñanza.

Divide los ejercicios en dos clases: los problemas reales y los de fantasía. Antes se preferían estos últimos, mientras que ahora se prefieren los primeros. Es un progreso, pero nada debe exagerarse. A causa de su complejidad, los problemas reales están con frecuencia fuera de los alcances de los alumnos de enseñanza secundaria; hay que simplificarlos; pero importa conservar en ellos los elementos esenciales, pues debe tenerse mucho ciudado de no mostrar a los jóvenes una imágen deformada de la vida; importa también que el alumno reconozca siempre la clase del problema que debe resolver.

Los problemas fantasistas tienen otra razón de ser: para ciertas cuestiones aclaran una faz matemática que la práctica deja en la sombra, no ofrecen inconvenientes si el resultado es posible: desgraciadamente muchas personas tienen tendencia a excluir el buen sentido del estudio de las matemáticas; es un gran defecto, pues la primera verificación de un cálculo es ver si el resultado es el que debe esperar un hombre razonable.

De otro punto de vista todavía, es útil la aritmética política; es quizá la parte de la aritmética que suministra los mejores ejemplos de cálculo numérico. Se presta al estudio de los diversos procedimientos y aparatos que usan los calculadores: reglas de cálculo, tablas numéricas, métodos gráficos, etc. Los métodos gráficos, en particular, no tienen en la enseñanza el sitio que merecen. Una curva habla mejor a la inteligencia que una fórmula, principalmente a los jóvenes cuyo pensamiento es generalmente concreto. Por otra parte, un abaco reune en una sola hoja de papel resultados que nunca una tabla numérica presentaría con tanta claridad.

La enseñanza de la aritmética política debe evitar dos

escollos: no debe entrar demasiado en los detalles, pues la escuela secundaria no prepara únicamente para el comercio, sino para una multitud de otras profesiones: tampoco debe ser demasiado abstracta: la aritmética política es una parte de las matemáticas aplicadas y se pierde su sentido sino toman muy de cerca la realidad. El profesor que se inspire en el folleto del profesor Timerding encontrará el justo medio, sobre todo si sabe penetrarse del método que constituyen su encanto y su mérito. El profesor Timerding, en efecto, no se pierde en vagas especulaciones; apoya cada una de sus observaciones en ejemplos cuya elección es tan juiciosa que conduce muy naturalmente a consideraciones muy generales.

El profesor Timerding no oculta la dificultad de una enseñanza tal como la concibe: la preparación de los profesores. Es la Universidad la que debe organizar bien los estudios y los exámenes para ese fin: un buen curso de economía política, por ejemplo, acostumbraría a los futuros profesores a no ver exclusivamente del punto de vista matemático las cuestiones que hemos tocado. Los ayudaría a permanecer más tarde en contacto con la vida económica y les mostraría en qué sentido deben perfeccionarse, pues un buen profesor, deseoso de dar una enseñanza fructuosa, no economizará su trabajo para conocer cada vez mejor un dominio que, como la aritmética política, enseña para que pueden servir las abstracciones matemáticas.

La enseñanza del cálculo en Alemania, por el doctor Lietzmann (126 páginas).

Esta obra es un estudio muy completo, muy profundo de la enseñanza del cálculo aritmético en Alemania, tanto en las escuelas primarias, como en las medias y en las normales de maestros. El autor especifica que se trata del cálculo, es decir de las operaciones hechas con números positivos, entero o fraccionarios, representados por cifras.

Durante mucho tiempo sólo se daban a los niños las reglas necesarias para efectuar las operaciones, sin ensayar de explicárselos. Es principalmente Pestalozzi (1746 1827) que introdujo el razonamiento. Pero en Alemania los estudios en las escuelas superiores no se rigen por un programa común. Algunas ciudades prescriben programas anuales. Resulta entonces para el maestro la obligación de repartir las materias de ese programa sobre cada semana y aun sobre las diferentes horas de su enseñanza. Se atribuye mucha importancia a este modo de repartir la enseñanza: el maestro escribe sobre un cuaderno especial las materias tratadas durante la semana. El autor se extiende sobre esas cuestiones de programa y da ejemplos y detalles muy interesantes al respecto.

Insiste después sobre la importancia del cálculo mental. Se ejercita en este cálculo a los alumnos de todas las clases, aun de las clases superiores, yendo algunas veces hasta la exageración. El profesor Lietzmann ha visto preguntar en una escuela normal de maestro ejercicios de cálculo mental que se resuelven por un sistema de ecuaciones de varias incógnitas.

El maestro hace pues efectuar un número considerable de operaciones y de ejercicios: su tarea se facilita con libros de problemas que usan los alumnos. La colección de ejercicios de Koch, aparecida en 1855, ha alcanzado 552 ediciones: del libro de cálculo de Buttner fueron vendidos más de diez millones de ejemplares.

Algunos de esos libros contienen teoremas, más bien sus enunciados: la parte teórica no excede de la indicación de algunas reglas, de algunas simplificaciones, de algunos ejemplos desarrollados. Esos libros existen en gran número, así como las revistas pedagógicas: la *Biblioteca de la unión de los maestros alemanes* de Berlin, recibe más de un centenar.

Estas consideraciones generales están contenidas en el primer capítulo.

El segundo capítulo está consagrado a las operaciones

con los números enteros. Al principio se trata de enseñar la numeración hablada, y para esto se procede en Alemania, como en Francia y como en todas partes, por medio de objetos, de bolas, de bastoncillos. Se representa la unidades de los diversos órdenes por imágenes distintas o por objetos señalados con puntos.

Al llegar a las operaciones, se plantea la siguiente cuestión: ¿Deben darse explicaciones y formular reglas? «No tenemos en Alemania (dice el autor) ninguna teoría del cálculo numérico, este intermediario entre nuestro cálculo y nuestra aritmética, o álgebra, que los franceses designan por aritmética en los programas de sus escuelas. Así, en el dominio del cálculo numérico una exposición sistemática con demostraciones lógicas basadas sobre axiomas no existen entre nosotros. Aun cuando se habla de justificación lógica (Schellnen) la regla no es más que el resumen de cierto número de ejemplos anteriormente tratados».

Creo que el profesor Lietzmann ha tenido a la vista los libros de Aritmética de Bourlet. Ha visto sin duda con qué cuidado y con qué claridad se sabe explicar a los niños de Francia todo lo que su edad les pone en estado de comprender.

No puedo citar aquí los numerosos detalles que el libro da sobre la adición, la sustracción, la multiplicación, la división. En lo referente a la divisibilidad, sólo se estudian los caracteres más simples, y aún algunas veces se dan los caracteres por 3 y por 9 sin explicarlos y se les aplica a las pruebas por 9.

Se enseña la investigación de los números primos hasta 20 o hasta 100 por la criba de Eratóstenes. Nunca se demuestra que la serie de números primos es ilimitada.

Raras veces se trata de los divisores comunes de varios números y cuando de ellos se habla no se demuestra.

Sólo las escuelas superiores enseñan la descomposición en factores primos, pocos libros indican la investigación del máximo común divisor por el método de las divisiones sucesivas, debido a Euclides.

Austria

I

ORGANIZACIÓN DE LA ENSEÑANZA SECUNDARIA MODERNA AUSTRIACA

La actual organización de enseñanza secundaria austriaca tuvo su origen hace 70 años en el *proyecto de organización* de los gimnasios, elaborado por Exner y Bonitz. En lo referente a la enseñanza matemática, transcribiré a continuación la parte que más directamente interesa al tema que estoy tratando de un artículo que el profesor austriaco Otto Simon publicó en « *L' enseignement mathemátique* ».

« El proyecto de organización de la enseñanza secun daria de Exner y Bonitz forma todavía la base de organización actual de los gimnasios. [1] Ese proyecto atenuó, por lo menos parcialmente, el predominio secular de la enseñanza de las lenguas. Los dos cursos de filosofía forman actualmente, con las seis clases inferiores, un organismo común que, por la división en un gimnasio inferior, que comprende cuatro clases y un gimnasio superior, recibe así una división natural en dos secciones. El gimnasio no prepara solamente para el gimnasio superior, sino que, abrazando en su enseñanza las llamadas *materias reales* (matemáticas, física, historia, geografía, ciencias naturales) llega a un cierto punto término y ofrece un conjunto determinado de una cierta cultura general. Los que lo han recorrido pueden entonces entrar en las escuelas especiales, las escuelas de comercio, etc. Continúa después el gimnasio de una manera más científica su enseñanza y forma la escuela preparatoria de la Universidad.

(1) Este artículo apareció en 1902.

Según las instrucciones adjuntas al proyecto, la enseñanza de las matemáticas, en las clases inferiores, debe de preferencia ligarse a la intuición elemental: debe desarrollar en los alumnos cierta facilidad en las operaciones aritméticas y ejercitar en ellas la concepción matemática, colocando en primera línea la intuición más bien que las consideraciones de orden lógico. El gimnasio superior [1] persigue un fin más elevado: da a los alumnos el conocimiento del enlace sistemático que existe entre las operaciones fundamentales, y les enseña el desarrollo de la idea de número. No obstante el empleo de este excelente plan de estudios, no podían alcanzarse mejores resultados mientras se matuviera el sistema de que el mismo profesor tuviera que enseñar todas las materias de una clase. Antes de que se extendiera el campo de enseñanza de las matemáticas ese sistema había dado resultados muy curiosos. Así Wilhelm cuenta la anédocta muy divertida que un filólogo que había tomado un cero por la letra O, enunció como axioma, el teorema a O = O.

El proyecto orgánico, con sus instrucciones anexas, fué generalmente aceptado por los círculos competentes del país: fué estudiado en Alemania y mereció informes elogiosos.

Sin embargo, el nuevo proyecto no tardó en levantar una violenta oposición. Se alegó que las matemáticas, que hasta entonces no disponían más que de media hora de enseñanza por semana, y las ciencias naturales que no se habían enseñado absolutamente, iban a obtener cada una tres horas semanales, mientras que la enseñanza del latín perdería mucho de su posición dominante. Los adversarios de la reforma pidieron en 1858 un nuevo proyecto por el cual la geometría sería enteramente excluída de las tres clases inferiores, que la cuarta clase no podría admitir ninguna nueva enseñanza en aritmética y que la enseñanza de las ciencias naturales debería ser entera-

(1) Equivale a decir el segundo ciclo.

mente suprimida en el gimnasio inferior en provecho del latín. El temor de que tales proposiciones pudieran ser aceptadas era por demás justificado, visto que el gobierno, aunque solamente de una manera condicional, se pronunció en su favor. Las proposiciones levantaron viva discusión en la revista que aún es órgano director del gimnasio clásico, fundada por el gobierno en 1849.

Las opiniones fueron casi unámines para condenar esos nuevos ataques contra la enseñanza de las matemáticas. El hecho, además, de que al lado de especialistas tales como Gernerth, F. C. Lott, y otros, lo mismo que filólogos como Bonitz, tomarán la defensa de las matemáticas muestra cuanta importancia se reconocía ya a esa enseñanza. La 18ª asamblea de filólogos y funcionarios de la enseñanza alemana, [1] que se pronunció unánimemente contra los esfuerzos antimatemáticos, hizo inclinar de nuevo la balanza en favor del plan de estudios de 1849; y las proposiciones de reforma en perjuicio de la enseñanza de las matemáticas no tuvieron ningún resultado.

Gracias a la victoria decisiva del proyecto de organización, la importancia de las matemáticas se afirmó en nuestros gimnasios y se pudo desde entonces tratar de mejorar cada vez más la organización interior y los métodos de enseñanza de esas ciencias. Desde entonces las instrucciones relativas a las matemáticas fueron cambiadas en puntos secundarios; la tendencia de esos cambios consiste en una disminución de la materia de enseñanza a favor de mayor profundidad y de una instrucción sistemática completa. Cuando en 1884 el Ministerio de Instrucción Pública, basándose en las experiencias didácticas hechas durante los últimos treinta años, hizo una nueva edición de las instrucciones, colocó la enseñanza de las matemáticas « enteramente en el mismo rango que la de las lenguas y la historia ».

En 1888, el ministerio publicó una segunda edición de

(1) Tuvo su asiento en Viena, en 1859.

las indicadas instrucciones, que contiene una disminución poco importante de la materia de enseñanza en las clases superiores, sin por eso disminuir el número de horas consagradas a la enseñanza.

El plan de estudios de 1900 comprende lo que sigue

GIMNASIO INFERIOR

1.ª clase, tres horas semanales. — *Aritmética:* las cuatro operaciones efectuadas con números enteros y decimales; divisibilidad; ejercicios preliminares para el cálculo de las fracciones.

Geometría (estudio preliminar) nociones preliminares' propiedades simples del triángulo.

2.ª clase, 3 horas semanales — *Aritmética:* fracciones, proporciones, regla de tres simple.

Geometría (estudio preliminar): segmento de recta; ángulo, bisectriz; igualdad de triángulos; el círculo; el cuadrilátero; el polígono.

3.ª clase, tres horas semanales — *Aritmética:* las cuatro reglas, efectuadas con números enteros o fraccionarios; cuadrado; raíz cuadrada.

Geometría (estudio preliminar): transformación de las figuras; medida de las áreas; teorema de Pitágoras; semejanza.

4.ª clase, tres horas semanales — *Aritmética;* ecuaciones de primer grado; cubos, raíces cúbicas; reparticiones proporcionales.

Geometría (estudio preliminar): introducción a la estereometría.

Fin de la enseñanza del gimnasio inferior. — Seguridad en el cálculo numérico, su aplicación en la práctica; conocimiento de las formas geométricas, de sus más importantes propiedades y de sus relaciones, basadas principalmente en un método intuitivo bien ordenado.

GIMNASIO SUPERIOR

5.ª clase, cuatro horas semanales — *Aritmética* (álgebra): las cuatro operaciones fundamentales; reglas; proporciones; ecuaciones de primer grado.

Geometría: planimetría.

6.ª clase, tres horas semanales — *Aritmética:* potencias, raíces, logaritmos, ecuaciones de segundo grado.

Geometría: estereometría; trigonometría (triángulos rectángulos).

7.ª clase, tres horas semanales — *Aritmética:* ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas; ecuaciones de Diofanto; progresiones; regla de interés compuesto.

Geometría: trigonometría; geometría analítica de dos dimensiones.

8.ª clase, dos horas semanales — Ejercicios de resolución de los problemas matemáticos — Revisión de las partes más importantes.

Fin de la enseñanza del gimnasio superior: suministrar un conocimiento profundo de las matemáticas elementales por medio de múltiples ejercicios.

Después de haber terminado la 8.ª clase, el alumno deberá someterse a un examen más extenso llamado *examen de madurez*, que comprende dos partes, una escrita y otra oral, haciéndose la última unos dos meses después de la primera. Se exige, para las matemáticas una comprensión basada sobre el conocimiento de los principales teoremas de las matemáticas elementales y de sus demostraciones, la facilidad y seguridad de su aplicación, la habilidad en la resolución de las ecuaciones, en el manejo de las tablas de logaritmos y en la resolución de problemas estereométricos.

Sólo después de haber dado con éxito este examen es que se obtiene el derecho de ingresar en una escuela técnica o de seguir los cursos universitarios.

Las prescripciones concernientes al examen de los candidatos a la enseñanza, introducidas en 1846, fueron revisadas en 1884 y en 1897. Para ser admitido a examen es necesario demostrar que durante cuatro años se ha estudiado la materia en una Universidad del país, — pudiendo admitirse que uno de esos años se haya estudiado en Alemania. El examen se divide en tres partes: un trabajo hecho a domicilio, en un plazo máximo de seis meses, un examen a puerta cerrada y un examen oral correspondiente al anterior. El derecho de enseñar matemáticas en los gimnasios superiores sólo puede ser obtenido en conexión con la facultad de enseñar la física. Los profesores de ciencias naturales en el gimnasio superior deben demostrar su capacidad de enseñar las matemáticas y la física en el gimnasio inferior. Las exigencias son las siguientes:

A) En el *examen para la enseñanza en todo el gimnasio* (inferior y superior): (1) Conocimiento de la aritmética general (álgebra), de la geometría sintética y de la geometría analítica. Conocimiento del cálculo diferencial e integral y de su empleo en geometría, los elementos del cálculo de variaciones, conocimientos de las nociones fundamentales de la teoría moderna de las funciones.

B) Para el *examen de los candidatos a la enseñanza del gimnasio inferior* se exige: el conocimiento de las matemáticas elementales, seguridad completa y facilidad en el empleo de los métodos de cálculo y de construcción en esta materia.

Después de haber obtenido aprobación en este examen, todo candidato es agregado a un Gimnasio para adquirir la aptitud práctica de la enseñanza. Es después de un año de prueba que obtiene el candidato un puesto de profesor en una escuela media. (2)

(1) Es decir en las ocho clases.

(2) Se aplica esta denominación al Gimnasio, Escuela real, Escuela industrial Seminario de profesores.

Las matemáticas y la física, siendo enseñadas por el mismo profesor, tiene éste la ventaja de poder utilizar prácticamente las matemáticas en sus lecciones de física. Si, además, se tiene en cuenta el empleo de las matemáticas en la enseñanza de las ciencias naturales y de la cristalografía, se observa que los profesores que enseñan las matemáticas en Austria pueden estar satisfechos de la posición acordada a su materia en el plan de estudios secundarios. Las últimas instrucciones (1900) hacen resaltar expresamente que sólo pretenden dar consejos, y servir de guia principalmente a los profesores que empiezan su carrera; dejan toda latitud a la individualidad de cada profesor sin imponerle ninguna barrera. Este hecho permite encarar con confianza el desarrollo ulterior de la enseñanza matemática en Austria.

Nota.—Publicaré algunas páginas más adelante los programas e instrucciones de 1910 sobre la enseñanza de las matemáticas, que son los vigentes.

II

LOS DOS CICLOS DE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA [1]

A fin de reparar o de atenuar las dificultades que la enseñanza abstracta de la geometría ofrece a los principiantes, se ha instituído en Austria y en Alemania un curso preparatorio en el que se enseña la geometría partiendo más bien de la experiencia que empleando el razonamiento deductivo.

Describiré desde luego lo que se hace en Austria, donde, desde 1849, se ha dado a esa enseñanza una organización de las más interesantes y muy felizmente adaptada

(1) *Marotte.— La enseñanza de las ciencias matemáticas y físicas en Alemania*

a la división en dos ciclos de la enseñanza secundaria. La geometría intuitiva ha tomado allí su completo desarrollo, y se percibirá en ella, mejor que en la organización alemana, todavía reciente y embrionaria, los principios y los caracteres de la enseñanza moderna.

La geometría intuitiva en Austria. — He dicho ya que, en la enseñanza secundaria austriaca, cada rama de conocimiento se estudia en dos etapas: en la primera bajo una forma elemental, en el gimnasio inferior; en la segunda, más profundamente, en el Gimnasio superior. De acuerdo con este principio, el estudio de la geometría se hace en dos grados: la geometría intuitiva en el Gimnasio inferior (1); la geometría lógica, bajo la forma que nos es familiar, en el Gimnasio superior. (2)

Se juzgará de la extensión que se da a la geometría intuitiva por el siguiente plan de estudios, que atribuye en cada clase una hora y media por semana a esa enseñanza.

Clase Primera (Séptima francesa). — Las figuras fundamentales: rectas, círculos, ángulos y paralelas. Los triángulos, excluyendo los casos de igualdad. Las construcciones fundamentales.

Clase Segunda (Sexta francesa). — Los casos de igualdad de los triángulos; aplicaciones. Las propiedades principales del círculo, del cuadrilátero, de los polígonos.

Clase Tercera (Quinta francesa). — Medida de las longitudes y de las áreas. Casos simples de transformación y de división de las figuras. Los teoremas sobre el triángulo rectángulo y sus aplicaciones. Principios esenciales de la semejanza de las figuras geométricas. Construcción y descripción de la elipse, de la hipérbola y de la parábola.

Clase Cuarta.—Estereometría. Posiciones respectivas de las rectas y de los planos. Angulos poliedros.

(1) 1.º a 4.º año.
(2) 5.º a 8.º año.

Principales especies de sólidos: cálculo de sus superficies y de sus volúmenes.

Véase a continuación el resumen de las excelentes razones que en 1849 se expresaron respecto de la división en dos ciclos de la enseñanza matemática en los Gimnasios y en las Escuelas reales, y las instrucciones de 1884 relativas a la misma enseñanza.

«La división en dos ciclos de la enseñanza matemática está justificada, por una parte, por la naturaleza de esas ciencias abstractas, y, por otra parte, por las diversas aptitudes intelectuales que poseen los alumnos en sus edades sucesivas.

La comprensión lógica de las matemáticas supone cierta destreza de cálculo numérico y de construcción geométrica, cierto conocimiento intuitivo de las formas del espacio, de sus relaciones y de sus leyes, que el Gimnasio inferior tiene por fin dar, a fin de preparar para la enseñanza científica del Gimnasio superior, y dar accesoriamente conocimientos utilizables a los jóvenes que entran en la vida práctica».

Véase, según las mismas publicaciones, los métodos que conviene seguir en la enseñanza del Gimnasio inferior.

« Por más que las matemáticas sean el tipo de una ciencia deductiva, el profesor deberá renunciar al empleo del razonamiento deductivo que le es familiar y adaptarse a la facultad de comprensión de sus alumnos. Por inducción deberá ir de lo simple a lo compuesto, de lo concreto a lo abstracto, recordar que un enunciado general no sostiene la memoria y no facilita el pensamiento si aquel no está penetrado de un contenido concreto y si no es adquirido por un claro conocimiento de lo complejo que contiene.....

La geometría euclídea se propone, como toda ciencia deductiva, reducir a un mínimo el número de axiomas; la geometría intuitiva no tiene que satisfacer a esta exigencia. Muchas verdades geométricas son tan inmediatamente evidentes como los mismos axiomas euclídeos; se

simplificará la enseñanza admitiendo sin demostración tales hechos adquiridos por la intuición. Por ejemplo se podrá admitir que los ángulos formados por dos rectas. por una recta y un plano, por dos planos, no cambian cuando una de las dos figuras se desplaza paralelamente a sí misma. Se suplirá la demostración del teorema sobre la normal a un plano observando que si un ángulo recto gira alrededor de uno de sus lados supuesto fijo, el otro lado describe un plano. Se observará una justa medida en el aumento del número de axiomas, haciendo notar que no hay porque reemplazar una demostración por un axioma sino en el caso de que ella sobrepase la capacidad de los alumnos. Las demostraciones verdaderamente simples no deben ser excluídas de la enseñanza, pues, gracias a ellas, el alumno se eleva, poco a poco, de la intuición inmediata a la comprensión lógica. Para establecer la igualdad de dos figuras, se utilizará, en lo posible, la noción de movimiento: traslación, rotación. Cuando teoremas, como el de Pitágoras, pueden ser demostrados tan bien por una vía puramente geométrica que por cálculos aritméticos, se preferirá el primer método como más intuitivo.

Para despertar y sostener la intuición interior, el dibujo es un auxiliar indispensable: muchos teoremas resultan evidentes con el auxilio de una construcción. El dibujo no es menos necesario en geometría que el cálculo en aritmética, pues las aplicaciones más frecuentes de la geometría dependen de la construcción de las figuras, como las de la aritmética dependen del cálculo. El dibujo tiene la importante cualidad de ejercitar las manos y los ojos del alumno, que aprende a servirse de la regla, de la escuadra, del compás, del doble decímetro, del transportador. Para los jóvenes alumnos convienen más esos ejercicios mecánicos que la enseñanza sistemática y lógica. Por todas esas razones el dibujo debe ser objeto de un cuidado particular y aún debe llegar a ser la base de la enseñanza de la geometría plana.

La condición esencial de una enseñanza fructuosa de la estereometría es el empleo continuo de modelos que realicen materialmente las formas del espacio que se quieren estudiar. Los modelos de madera permiten hacer las medidas exactas que sirven para el cálculo de sus superficies y de sus volúmenes; la determinación del peso conduce al conocimiento de la densidad; una serie de modelos hechos de la misma madera permite la comparación de los volúmenes y la verificación de las fórmulas.

Las posiciones respectivas de los planos y de las rectas pueden ser representadas por tableros de madera y varillas de fierro. Los alumnos mismos pueden construir modelos de cartón, dibujando su desarrollo. Cuando están suficientemente ejercitados en la concepción exacta de las figuras del espacio por el manejo de los modelos, se les ejercita en representarlos por los dibujos en perspectiva.

En suma, se hace en Austria para la geometría lo que en todas partes se hace para la aritmética. Nadie trataría de enseñar la aritmética teórica a niños antes de que no manejen perfectamente el cálculo numérico. Los ejercicios prácticos de medida y de dibujo son de tanto provecho para preparar y sostener la enseñanza de la geometría como lo son los de cálculo práctico para preparar y sostener la enseñanza de la aritmética. No hay necesidad de insistir sobre la utilidad de los conocimientos de dibujo así adquiridos y de su aplicación a las artes.

III

CIRCULAR DEL CONSEJO ESCOLAR DE LA BAJA-AUSTRIA DEL 10 DE MAYO DE 1907 A LOS DIRECTORES DE LAS ESCUELAS SECUNDARIAS.

« En estos últimos tiempos ha sido propuesto en varias ocasiones, transformar la enseñanza matemática en las

escuelas secundarias superiores. Esas proposiciones tienden a desarrollar la intuición del espacio y a introducir la noción de función y las primeras nociones del cálculo diferencial e integral; piden ejercicios y problemas tomados de otros dominios científicos y de la vida práctica; además se pide se tenga en cuenta los lazos entre las matemáticas y otras materias, especialmente la física y la geometría descriptiva.

Según el decreto del 23 Abril 1907 el ministro de Cultos y de Instrucción autoriza que se hagan ensayos en ciertas escuelas medias, a fin de permitir el estudio de la realización práctica de esas proposiciones.

El consejo escolar tiene plenos poderes para confiar esos ensayos, provisoriamente, durante el año 1907-1908, a aquellos profesores que se han ocupado de esas cuestiones y que poseen las cualidades pedagógicas necesarias. Aunque ellos tengan toda libertad en cuanto a los programas y a su extensión, no deberán apartarse de los fines de las diversas enseñanzas y en ningún caso sobrecargar a los alumnos..... ».

Como se ve, las autoridades escolares austriacas comprenden que hay motivo de reformar los programas de acuerdo con los votos que fueron expresados en numerosas asambleas, tanto en la de los naturalistas y médicos alemanes, como en las reuniones de los profesores matemáticas. Se sabe que en Francia esas reformas han sido realizadas hace varios años.

(Tomado de *L'enseignement mathematique,* año 1907).

IV

LAS ESCUELAS REALES EN AUSTRIA

De L' Enseignement mathematique—1910.)

I — Los nuevos planes de estudio

Existen en Austria, para la enseñanza secundaria superior, tres clases de establecimientos: los gimnasios clásicos, los gimnasios reales, y las escuelas reales. Siendo casi iguales los programas de matemáticas en esos establecimientos, nos limitaremos a reproducir los de la Escuela real, que comprenden además la enseñanza del dibujo lineal y de geometría descriptiva. Según costumbre esos programas son acompañados de observaciones destinadas a indicar el espíritu con que deben aplicarse.

El tiempo consagrado a las matemáticas es de tres horas semanales en los primeros 7 años de los gimnasios clásicos y reales y de dos horas en el 8.º año. Conviene agregar que en las clases superiores el número de lecciones por semana es 28 o 29.

Las escuelas reales comprenden 7 clases con 33 horas de lecciones por semana en las superiores. El tiempo consagrado a las matemáticas, lo indica el siguiente estado:

ESCUELAS REALES	Clases						
	I	II	III	IV	V	VI	VII
Matemáticas.	3	5	5	4	4	4 (1.er sem.)	5
Dibujo lineal y geometría descriptiva	—	2	2	3	3	3 (2.º sem.)	2

El decreto referente a las escuelas reales fué promulgado el 8 de Abril 1909. En la introducción, insiste el ministro de I. P. sobre la necesidad que había de proceder a una revisión de los programas de 1898 a causa de

los progresos realizados, no solamente en las diversas ciencias, sino también en la manera de concebir la enseñanza y sus métodos, siendo el caso principalmente para las matemáticas y el dibujo.

PROGRAMA DE MATEMÁTICAS DE LAS ESCUELAS REALES DE AUSTRIA — 1910

Objeto de la enseñanza — Conocimiento fundamental y práctico de las matemáticas elementales, comprendiendo la noción de función y sus aplicaciones.

1.ª clase — 3 horas semanales

Cálculo — Las 4 operaciones fundamentales sobre enteros concretos y abstractos, limitándose al principio a números simples y complicando gradualmente. — Cifras romanas — Monedas del país, pesas y medidas — Números decimales, considerándolos al principio según el sistema de posición de las cifras, más tarde como fracciones decimales en correlación con ejercicios preparatorios sobre el cálculo de las fracciones (fracciones ordinarias cuyos denominadores están compuestos de un pequeño número de factores primos, y aplicadas a ejemplos concretos, sin hacer uso de las reglas habituales de las fracciones, consideradas como clase particular de los números)

Estudio del espacio — Ejercicio preparatorio sobre los cuerpos geométricos, principalmente el cubo y la esfera, uso del compás, de la regla, de la escuadra, de la escala de reducción y del trasportador. — Medida y dibujo de los objetos del local. — Se familiarizará a los alumnos con las propiedades y relaciones de las figuras más simples (ángulo de 90.º, 60º, triángulos equiángulos, rectángulos, equiláteros, etc), rectas y planos paralelos y perpendiculares en las superficies y cuerpos sólidos.

Superficie del cuadrado, del rectángulo, volumen del

cubo, del paralepípedo recto, como aplicaciones del sistema métrico.

2.ª clase — 5 horas semanales

Cálculo — Medidas y otros diversos temas. — Factores primos de números simples al principio, complicando gradualmente — Reglas generales de cálculo de fracciones: transformación de fracciones ordinarias en fracciones decimales y viceversa — Magnitudes directamente e inversamente proporcionales (lo que conducirá de la manera más sencilla a la noción de función) — Constante aplicación al cálculo de los números decimales concretos en un dominio cada vez más extenso—Cálculo de intereses en los casos más sencillos.

Estudio del espacio — Simetría de las figuras del espacio y de las figuras planas. – Estudio, por medio de construciones, de los parámetros que determinan completamente una figura plana (en lugar de las demostraciones de igualdad). Aplicaciones variadas a medidas en la clase, y, siendo posible, al aire libre — Triángulos, cuadriláteros polígonos (principalmente regulares): círculos — Los prismas rectos, pirámides, cilindros y esferas que se relacionan con esas figuras — Se estudiará la esfera de acuerdo con las exigencias de la enseñanza de la geografía, que se hace al mismo tiempo — Desplazamiento de las figuras (su transformación de forma y magnitud, resultante de la variación de los parámetros).

Dibujo geométrico — 2 horas consecutivas por semana. Ejercicios continuos en el empleo de los instrumentos de dibujo — Problemas de construcción, correlativos del estudio del espacio, aplicaciones igualmente al dibujo de ornamentos geométricos simples.

3.ª clase — 5 horas semanales

Elementos de aritmética general como continuación de la enseñanza del cálculo: enunciados de las reglas de

cálculo y representación de esas reglas por medio de letras, transformaciones más sencillas, ejercicios de sustitución (frecuentes pruebas de las operaciones generales por la sustitución de cifras en los datos y resultados). Números negativos en las aplicaciones no artificiosas más sencillas (termómetro, barómetro, nivel de agua, escala de los números, etc).

Relaciones entre las superficies (comparación, transformaciones más sencillas, fórmulas de medida) — Volumen del prisma recto y del cilindro — Medidas y comparaciones de los objetos de la clase, del jardín de la escuela y, siendo posible, operaciones análogas al aire libre.

Teorema de Pitágoras, con abundantes demostraciones intuitivas y aplicaciones a las figuras planas y a las figuras del espacio más simples (por ejemplo diagonal del cubo, altura de la pirámide regular de base cuadrada). Pirámide, cono, esfera: superficie y volumen de esos cuerpos (sin demostración de esas fórmulas para la esfera).

Numerosas relaciones de la enseñanza aritmética y de la geometría — Representación gráfica de las 4 operaciones por medio de rectas: de las expresiones $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $(a + b)(a - b)$, $(a + b)^3$... por medio de rectángulos y cubos — Extracción de la raíz cuadrada y de la raíz cúbica, en vista de los cálculos de la geometría plana y del espacio — Operaciones abreviadas — Estimación de la exactitud a que se aspira basándose sobre la medida efectiva de los parámetros de determinación — Estimación del orden de magnitud del resultado, comparación de los resultados de la evaluación y del cálculo, por medidas y pesadas de modelos.

Nuevas ocasiones de desarrollar la idea de función: variación de las longitudes, superficies y volúmenes de los cuerpos, de las figuras y sólidos semejantes como la 1.ª, 2.ª y 3.ª potencia, o como la raíz cuadrada y cúbica de los parámetros de determinación (ésto por consideraciones indirectas, el dibujo a la nueva escala). — Ecuacio-

nes sencillas en cuanto ellas sean necesarias a los cálculos de geometría plana y del espacio de esta clase.

Dibujo geométrico — 2 horas consecutivas por semana. Continuación y desarrollo de los ejercicios de la 2.ª clase.

4.ª clase — 4 horas semanales

Álgebra — Explicación de las leyes concernientes a las operaciones y de sus relaciones; ejercicios de transformaciones aplicadas sobre todo a la resolución de las ecuaciones, comprendiendo la prueba por la sustitución de los resultados (numéricos y algebraicos) en las ecuaciones primitivas — Como aplicación a la noción de función se hará observar la variación de los resultados obtenidos por el cambio de los elementos del cálculo — Estudio más a fondo del sistema decimal y ejercicios más simples sobre otros sistemas — Medidas, múltiplos, fracciones — Ecuaciones de 1.er grado con una y muchas incógnitas — Relaciones, proporciones — Ecuaciones de 2.º grado, en cuanto ellas sean necesarias para la enseñanza de la geometría plana — Representación gráfica de la función lineal y su utilización para la resolución de las ecuaciones de 1.er grado.

Geometría plana — (Hasta la congruencia, comprendidas sus aplicaciones) — Repetición y desarrollo del campo precedente, con explicaciones de las definiciones y demostraciones que se aplicaran a ejemplos característicos: el resto del campo se tratará sobre todo bajo forma de problemas — Resolución de problemas de construcción, según diversos métodos generales (también por medio de construcciones algebraicas) con exclusión de todos los problemas que sólo se resuelven por medio de artificios. Problemas de cálculo concernientes al resto del campo de estudio.

5.ª clase — 4 horas semanales

Álgebra — Potencias y raíces aplicadas a ejemplos no artíficiales — Ecuaciones de 2.º grado con una incógnita (y las más simples con varias incógnitas) — Ecuaciones de grados superiores, las más fáciles, que se reducen sin artificio a las de 2.º grado — Números irracionales, imaginarios y complejos, en cuanto resulten de la resolución de esas ecuaciones — Representación gráfica de la función de 2.º grado y su aplicación a la resolución de las ecuaciones de 2.º grado — Logaritmos.

Geometría plana — Continuación y fin del programa de la 4.ª clase.

Geometría del espacio — Propiedades fundamentales del ángulo sólido en general y del ángulo triedro en particular (ángulo polar) — Propiedades, superficie y volumen del prisma (cilindro), de la pirámide (cono), de la esfera, de sus secciones planas y de sus volúmenes truncados. Teorema de Euler, poliedros regulares.

6.ª clase — 1.er semestre, 4 horas semanales — 2.º semestre, 3 horas semanales

Álgebra — Ecuaciones, logarítmicas y exponenciales, las más simples — Progresiones aritméticas (de 1.er orden), progresiones geométricas; aplicaciones de estas últimas, especialmente al cálculo de los intereses compuestos y de las rentas.

Goniometría, trigonometría plana y esférica — Las funciones trigonométricas, su representación gráfica, utilizada especialmente para hacer comprender las propiedades y relaciones de esas funciones — Resolución de los triángulos — Comparación continua de los teoremas y métodos de la trigonometría con los de la geometría plana y del espacio — Principios de la trigonometría esférica, limitándose a las relaciones y fórmulas que intervienen en las aplicaciones del resto del campo (en lo que se refiere al triángulo cualquiera, principalmente la ley de los senos

y la del coseno) — Diversas aplicaciones de la trigonometría a los problemas de agrimensura, de geografía, de astronomía, etc., en los cuales los parámetros de determinación serán, en lo posible, medidos por los mismos alumnos.

7.ª clase — 5 horas semanales

Álgebra — Permutaciones, arreglos, combinaciones en los casos más simples — Binomio de Newton para exponente positivo y entero — Primeras nociones del cálculo de probabilidades con aplicaciones a los problemas más simples del seguro de vida.

Geometría analítica — Se liga a las representaciones gráficas hechas precedentemente de algunas funciones dadas — Aplicación del método analítico a las líneas de 1.º y 2.º orden, y ocasionalmente, indicación de los procedimientos geométricos aplicados a las mismas figuras.

Estudio más profundo de los ejercicios de diferenciación y de integración más simple del campo de las matemáticas y de la física — Soluciones aproximadas de las ecuaciones algebraicas (y ocasionalmente de ecuaciones trascendentes muy simples) por los métodos gráficos.

Revisión general del dominio entero de la enseñanza matemática, principalmente de las ecuaciones y de las progresiones, de la estereometría, trigonometría y geometría analítica — Desarrollo más profundo de ciertos temas — Aplicaciones sobre los diferentes dominios de la enseñanza y de la vida práctica, más bien que de los problemas puramente formalistas.

CONSIDERACIONES HISTÓRICAS Y FILOSÓFICAS

Trabajos escritos — En todas las clases, tres pruebas por semestre, además pequeños ejercicios para ser hechos a domicilio entre las lecciones. En el caso de que al día

siguiente tenga lugar la lección se suprimirá esa tarea en las clases inferiores, y también en las superiores, a menos de haber una tarde libre entre dos. Si se juzga necesario, ejercicios hechos y corregidos en la clase.

PRINCIPALES TENDENCIAS DEL PROGRAMA MODERNO DE LAS ESCUELAS REALES AUSTRIACAS

1. Adaptación al desarrollo intelectual efectivo de los alumnos.
2. Simplificación del campo de estudio, por la trabazón de las ramas que se relacionan unas con otras, especialmente la aritmética y la geometría.
3. Adaptación del programa de matemáticas a las ramas correspondientes y a las aplicaciones de la vida real.
4. Asimilación de la idea de función, utilizando todas las ocasiones que se presentan en la enseñanza matemática, hasta el estudio de la variación de una función por medio del coeficiente diferencial.
5. Desarrollo de la intuición geométrica, facilidad de los trabajos manuales de los alumnos (construcción de modelos, medidas, etc.).
6. Dejar de lado toda materia sin valor, o reconocida como inútil del punto de vista didáctico.

El conjunto de la enseñanza matemática ha sido concebido de modo que la enseñanza de los tres primeros años constituye un estudio preparatorio de los números hasta la iniciación del cálculo literal, lo mismo que un estudio preparatorio del espacio por medio de representaciones geométricas realizadas por sus aplicaciones a las otras ramas (geografía, historia natural, etc), y a la vida ordinaria. La enseñanza de estos tres primeros años tiene por objeto también familiarizar a los alumnos con el empleo del lenguaje aritmético y geométrico (omitiendo, sin embargo, las definiciones formales prematuras).

A partir del 4.º año se tratará de la trabazón científica, de las nociones y proposiciones individuales de la aritmética y de la geometría (evitando sin embargo, una representación puramente deductiva). Se desarrollará poco a poco la noción de función y sus aplicaciones.

Quedan por hacer algunas observaciones relativas a cada clase particular.

Ya a partir de la enseñanza del cálculo de los dos primeros años se exigirá la seguridad en el cálculo de los números cuya necesidad se hace sentir igualmente en los grados superiores de la enseñanza matemática — Los principios del cálculo deberán adquirirse por medio de ejemplos sencillos sobre números pequeños, perfeccionando después el cálculo mecánico por el empleo de números algo mayores; después de lo cual el cálculo sobre los valores mayores se hará siu dificultad en tercer año mediante la utilización de las potencias (de base 10).

No se introducirá el cálculo abreviado antes de la 3.ª clase, (3.er año), pues sólo á partir de ella tiene aplicación.

El alumno podrá entonces, tan a menudo como sea posible, medir los parámetros de determinación (lados, ángulos, diámetro del círculo, etc. sobre figuras dibujadas por él mismo, podrá darse una idea de la exactitud, con frecuencia poco considerable, de las magnitudes dadas y de las calculadas y sobre la posibilidad de despreciar decimales en vista del grado de precisión a que se aspira.

Las razones y proporciones no son útiles sino a partir de la planimetría del 5.º año: bastará, por lo tanto, que se trate algunas de sus propiedades en la enseñanza de la aritmética del cuarto año, y ocuparse de las proporciones en particular en el estudio de las ecuaciones. Por lo contrario tal necesidad no se hace sentir en lo que concierne al programa de la 2.ª clase, en la cual los cálculos simples y compuestos que se estudian al fin del año permitirán llegar a los resultados de una manera más simple y más clara que pasando por las proporciones.

El estudio del espacio de la 3.ª clase (tercer año) con-

duce a los prismas rectos y a los cilindros, en correspondencia con las figuras planas. Será conveniente determinar las superficies calculadas por las pesadas de los prismas rectas y cilindros que les corresponden, e inversamente medir directamente sobre esos modelos los parámetros de determinación necesarios para calcular esas superficies.

La enseñanza de la aritmética en la 4.ª clase (cuarto año) renuncia completamente a la llamada introducción científica de la aritmética. Se la reemplazará ventajosamente considerando las relaciones que existen entre las diversas operaciones por la resolución de las ecuaciones de determinación, inversas después por trasposición mecánica. Tales aplicaciones permitirán a los alumnos comprender mucho más fácilmente las numerosas relaciones lógicas de los principios y de las leyes de la aritmética que por abstracciones prematuras.

La geometría plana del 4.º y 5.º año deberá tratarse de un modo análogo, no debiendo darse las demostraciones rigurosas más que para un pequeño número de teoremas, haciendo sentir al alumno la necesidad de tal demostración. Para la mayor parte de los *teoremas bastará señalar al alumno la razón de la exactitud de la proposición, sin insistir especialmente para los que le parezcan más o menos evidentes* (como la relación del ángulo central con el arco que comprende, y muchos otros). En todos los casos se evitará cuidadosamente obscurecer las verdades geométricas por un puro formalismo.

Los principios y leyes concernientes a la posición recíproca de las rectas y planos se tratarán en la geometría descriptiva (en parte también en el curso preparatorio) y no en la enseñanza sistemática de la estereometría. Si se renuncia así a tratar en detalle la congruencia y simetría de los triedros, una vez que los alumnos hayan hecho uso de los conocimientos adquiridos en una enseñanza precedente (especialmente en la geometría descriptiva) el programa de estereometría de la 5.ª clase (5.º año) podrá hacerse sin ningún apuro en un semestre, tanto más

que la enseñanza de la trigonometría prevé numerosas aplicaciones estereométricas. Pero la enseñanza será considerablemente simplificada cuando se tenga más en cuenta los estrechos lazos que unen la estereometría con la geometría descriptiva, y esto permitirá evitar muchas repeticiones.

Se dedicará un año completo a la goniometría y trigonometría, estudio que presenta también numerosas aplicaciones de geometría plana y del espacio. En cambio no habrá que perderse en las transformaciones goniométricas complicadas o en problemas trigonométricos cuya resolución exija artificios.

La introducción de las funciones trigonométricas deberá hacerse por medio de problemas prácticos de planimetría en particular sobre el triángulo rectángulo, limitándose desde luego al ángulo agudo. Después de haber adquirido las fórmulas fundamentales se las aplicará inmediatamente a la resolución del triángulo rectángulo: sólo después de esto se continuará la geometría.

Respecto de los cálcnlos numéricos será conveniente limitarse al principio á los valores naturales de las funciones (algunos de los cuales se hallan con el auxilio de triángulos rectángulos) y no utilizar los logaritmos de esas funciones más que para los problemas que resueltos de otro modo exigirían cálculos complicados.

El programa de trigonometría esférica deberá ligarse de una manera más efectiva á las nociones y consideraciones sobre el ángulo sólido y la esfera estudiados en estereometría. Este programa se comprenderá en el de trigonometría ordinaria en relación con el estudio del triángulo plano (en parte también con el del triángulo rectángulo).

Se insistirá mucho más sobre los medios de adquirir una gran seguridad en la resolución de las cuestiones de estereometría esférica, más que sobre la adquisición de fórmulas pnemónicas complicadas, cuyo empleo no sería ventajoso sino en problemas que salen del cuadro de la

actividad escolar. Se limitará al principio del seno y del coseno, y si por acaso el alumno estuviera obligado á procedimientos un poco largos para llegar á la solución de un problema, siempre habría menos empleo de energía y de tiempo que en adquirir todo aquel conjunto de fórmulas.

En el estudio de las potencias y de las raíces bastará indicar los pocos principios simples que justifican las fórmulas, evitando las demostraciones extensas de los diferentes teoremas.

El estudio de la función logarítmica se hará de una manera más cómoda por la representación gráfica más bien que por las tablas. En cuanto al punto de vista teórico debe insistirse sobre la utilidad de los logaritmos y del hábil empleo de las tablas (de cuatro o de cinco decimales).

Aunque en el programa sólo se indica el estudio de las funciones que se encuentran en la enseñanza matemática propiamente dicha, se tratarán igualmente funciones empíricas que particularmente se presentan en la enseñanza de la física, y de su representación gráfica por medio de curvas (superficies). De este modo los alumnos se darán cuenta del rol de las matemáticas en los fenómenos naturales.

El estudio de la geometría analítica se encuentra ampliamente preparado por las representaciones gráficas de las funciones hecho precedentemente; de modo que, desde luego, sólo se trata de una recapitulación general. Se podrá después consagrar mayor atención a las secciones cónicas, tanto más cuanto que este estudio se liga naturalmente a las representaciones gráficas referentes a las ecuaciones de segundo grado.

El programa del grado superior comprende un número relativamente restringuido de temas nuevos y una revisión general de todo lo estudiado en los años precedentes. Esta revisión no debe consistir solamente en una especie de apéndice; la recapitulación de la aritmética,

por ejemplo, se hará bajo forma de un estudio general de las ecuaciones con las representaciones gráficas que a ellas corresponden. Después, con motivo de la repetición de las progresiones, se introducirá la teoría del binomio y de las combinaciones, con la cual tienen relación. El repaso de la geometría analítica se hará de un punto de vista general, considerándola como una extensión de las relaciones ya hechas familiares a los alumnos por las representaciones gráficas.

Debe recomendarse el cálculo mental en todas las clases, la valuación de las relaciones de magnitudes y el cálculo de los números particulares A fín de que los alumnos adquieran cierta habilidad en el cálculo, es útil que los profesores de las diversas materias se entiendan para adoptar un lenguaje y notaciones uniformes.

En todos los grados inferiores, es de absoluta necesidad dejar de lado las definiciones formales de las primeras nociones de matemáticas; y aún en los grados medios y superiores, deberá procederse con gran precaución, sobre todo para las nociones completamente generales y primitivas, como la recta, el número, la magnitud. Más fácil será darse cuenta de si el alumno ha comprendido el alcance de esas nociones, por el empleo que de ellas hará en numerosas aplicaciones, más bién que haciéndole repetir definiciones aprendidas de memoria.

Se ve que las precedentes observaciones combaten vivamente toda formación exagerada en la enseñanza matemática; ellas se dirigen también, y muy especialmente, á la manera de introducir en la enseñanza el cociente diferencial. No se trata absolutamente de la diferenciación sistemática de las funciones elementales. Esos primeros principios de diferenciación (y de integración) deben hacerse principalmente bajo forma de aplicaciones de lo precedentemente estudiado; no deberán presentarse como cosa completamente nueva, tanto más que el alumno ya se habrá formado una idea de esos principios en la enseñanza de la física, á propósito de la velocidad y de la aceleración.

No debe, pues, considerarse este capítulo como una nueva carga para el alumno, sino como un medio de profundizar y por esto mismo de simplificar el campo precedente.

La elección apropiada de los problemas es de una importancia capital en los resultados de la enseñanza matemática. Problemas muy difíciles ó demasiado fáciles podrán perjudicar esos resultados y muy especialmente deberán evitarse todos los ejemplos puramente formalistas, las operaciones complicadas, las construcciones y cálculos de triángulos cuyos parámetros de determinación son poco cómodos, la resolución de ecuaciones por medio de artificios, etc.

Deben más bien tratarse aquellos problemas que se relacionan con las diversas materias de la enseñanza y que se presentan en la vida corriente.

Se consagrará 2 horas por semana al dibujo geométrico, en la segunda y tercera clase. Se tratará, ante todo, de adquirir una gran habilidad en el dibujo, lo que es igualmente muy importante para la geometria descriptiva de los grados superiores. Los resultados dependen en gran parte de la elección de los ejercicios. Para el texto se empleará la escritura redonda y para las figuras los caracteres de imprenta.

Respecto del tiempo a consagrar a la aritmética y a la geometría se dispondrá en forma de que el estudio del espacio en la primera clase se inicie cuatro semanas despúes del principio del año escolar. A partir de este momento, hasta finalizar la cuarta clase, se consagrará una hora por semana a la geometría; a partir de la quinta clase, se dividirá igualmente el tiempo entre la aritmética y la geometría, ordinariamente en forma alternativa. En la segunda y tercera clase, el dibujo geométrico debe ser enseñado por el profesor de matemática sin dejar de ser considerado como asignatura separada.

V

DIBUJO GEOMÉTRICO [1] Y GEOMETRÍA DESCRIPTIVA EN LAS ESCUELAS REALES

Grados inferiores

Fin de la enseñanza.—Habilidad en el dibujo lineal y en la ejecución de los problemas de construcciones geométricas; representación de objetos simples por proyecciones.

2.a Clase. — 2 horas semanales — En correlación con el cálculo y el estudio del espacio (véase el programa de matemáticas).

3.a Clase. — 2 horas semanales — En correlación con la aritmética y la geometría (véase el programa de matemáticas).

4.a Clase. — 3 horas semanales — Representación de las secciones cónicas basándose sobre las propiedades de sus focos. Tangentes en un punto sobre la curva, y por un punto exterior. Relaciones de posición. Dibujo de la base y de la elevación de cuerpos simples en posiciones particulares relativamente a los planos de proyección y tratando de desarrollar la faz intuitiva. Familiarización de las nociones de proyecciones horizontales y verticales de puntos, líneas, etc. Determinación de la longitud y de la inclinación de rectas y de la forma de figuras rectilíneas situadas en los planos de proyección. Representación de cuerpos poliédricos por rotación, en posiciones sucesivas. Elevación y proyecciones oblícuas de esos cuerpos; construcciones simples relativas a sus sombras (sombra al sol).

---

(1) Dibujo geométrico en los grados inferiores (2.º a 4.º año), geometría descriptiva en los grados superiores (5.º a 8.º año).

Grados superiores

Fin de la enseñanza. — Conocimiento de las principales leyes y de los principales teoremas del método de proyecciones ortogonales y de los principios fundamentales de la proyección oblícua y de la perspectiva, comprendiendo sus aplicaciones a la representación de objetos técnicos simples.

5.ª Clase. — 3 horas semanales — La enseñanza está estrechamente ligada a la de la 4.ª clase; ejecución sistemática de los principales problemas de geometría descriptiva sobre el punto, la recta y el plano por medio de las proyecciones vertical y horizontal, y de otras proyecciones laterales. Aplicación de esas construcciones a la resolución de diversos problemas, en particular a la representación de prismas y pirámides regulares de forma y posición dadas, con sus sombras; a la obtención de secciones planas, de prismas, pirámides y de otros cuerpos de superficies planas; intersección de esos cuerpos y determinación del sólido común en los casos más simples.

6.ª Clase. — 3 horas semanales — Representación del círculo en proyección normal, sombra arrojada sobre planos en el caso de que el foco de luz sea el sol. Proyección oblícua del círculo. Principales propiedades constructivas de la elipse considerada como proyección normal u oblícua del círculo, deducidas de las propiedades correspondientes del círculo. Representación de cilindros y de conos (principalmente de cilindros y conos de revolución) y de otros cuerpos compuestos, igualmente en proyecciones oblícuas. Planos tangentes a las superficies cónicas y cilíndricas. Secciones planas, entrelazamientos y penetración de esas superficies. Construcción de sombras siendo el sol foco de luz. Estudio más profundo de las secciones planas del cono de revolución; deducción de las propiedades constructivas más importantes de esas secciones.

Representación de la esfera, de sus secciones planas y de sus planos tangentes; construcción del límite de la

sombra propia y de la sombra arrojada, sobre planos, siendo foco el sol y siendo foco una luz próxima.

7.ª *Clase.* — 2 horas semanales — Representación de las superficies de revolución cuyos ejes son perpendiculares a uno de los planos de proyección, planos tangentes y sección plana.

Las nociones fundamentales de la perspectiva, en tanto cuanto sean necesarias a la representación de un objeto de superficies planas dadas por sus proyecciones normales.

Repetición y conclusión del programa de geometría descriptiva, con el auxilio de problemas generales que ofrezcan también un interés práctico.

A partir de la 4.ª clase se harán pequeños ejercicios a domicilio (sobre cuaderno) semanalmente.

OBSERVACIONES

a) Este programa de la enseñanza de la geometría descriptiva, nos dice que se busca no solamente desarrollar cierta habilidad de construcción, indispensable en los estudios de las escuelas técnicas superiores, sino sobre todo un conocimiento profundo de las representaciones del espacio, que si es necesario en las escuelas superiores, lo es también en la vida práctica. Se alcanzará este fin insistiendo más sobre la representación de los cuerpos, y ligando los problemas de construcción a esta representación. No habrá que limitarse solamente a considerar las principales formas que se tratan en estereometría, sino que también se tratarán las formas de cuerpos que ofrezcan un carácter técnico. La geometría descriptiva en la enseñanza de las escuelas reales, debe ser algo más que un simple método de resolución de problemas puramente teórico de estereometría; es preciso, sobre todo, que los alumnos se den cuenta del valor de esta materia, en lo que concierne a la vida práctica.

Para realizar este fin, es necesario insistir sobre la representación intuitiva del espacio, y no sobre que los alumnos aprendan de memoria diversos métodos de construcción. Sólo hay un pequeño número de construcciones fundamentales, que intervienen frecuentemente, como la determinación de la longitud de una recta, el rebatimiento de un plano, etc., sobre los cuales habrá que detenerse más; se tratará de ejecutarlas de la manera más rápida y con el menor número posible de líneas. Para las demás construcciones, se dejará mayor libertad al alumno, quien podrá escoger un método más largo, con tal que conduzca al resultado que se desea.

Cada construcción debe ser acompañada de explicaciones referentes a la correspondiente figura del espacio. Procediendo así el alumno se dará cuenta poco a poco, que es la figura del espacio lo que desempeña el rol esencial.

Hay que acordar una gran atención a la enseñanza del dibujo, teniendo en cuenta las pocas horas de que se dispone. El profesor tratará de perfeccionar a los alumnos en el empleo de los instrumentos de dibujo, de la regla y de la escuadra y predicará con el ejemplo. Debe recomendarse, muy especialmente, que el profesor ejecute, ordinariamente él mismo, las figuras en el pizarrón, tan bien como sea posible, con el auxilio de la escuadra y el compás. El dibujo a pulso en el pizarrón, debe evitarse en lo posible. El alumno debe, en efecto, darse cuenta que esas figuras no son simplemente una representación de las figuras del espacio como las que se destinan a la demostración de los teoremas de geometría, sino que los resultados, en lo que concierne a su forma y dimensiones, ofrecen una gran importancia, y que tales dibujos reemplazan con frecuencia cálculos complicados, y a veces de imposible ejecución. La consideración de la escala de reducción, según la cual son representados los objetos reales, contribuirá a desarrollar esta idea. Por medio de ejercicios de dibujo se desarrollará el trabajo individual.

Con el objeto de exponer su materia de una manera clara, el profesor sólo deberá hacer uso de expresiones de fácil comprensión y que verdaderamente ofrezcan una utilidad directa. La cuestión de las notaciones tiene igualmente su importancia, y sobre ella deberá entenderse con los profesores de matemáticas, pues que ambas ramas ofrecen numerosos puntos comunes.

b) 4.ª Clase. — Para hacer concebir a los alumnos las nociones de plano y de elevación, se colocará un paralelopípedo rectángulo, de modo que una de las caras sea paralela al piso, y otra al pizarrón, haciéndolo dibujar por cada alumno, en la posición en que lo vea, después como lo vería un alumno colocado en el fondo de la clase, y finalmente como lo vería un alumno colocado a gran distancia, mirando perpendicularmente al plano del pizarrón. Se supondrá que el cuerpo sea transparente. De esta manera, el alumno llega a considerar la elevación de un cuerpo como su imágen, tal como lo vería un observador colocado a muy gran distancia del pizarrón y mirando perpendicularmente a éste. Se procederá de la misma manera para la noción de plano. Se hará enseguida ejecutar las proyecciones de prismas y pirámides, y de cuerpos compuestos de prismas y pirámides, después de cilindros y conos de revolución, y de esferas, en las posiciones más simples relativamente a los planos de proyección, utilizando modelos, si fuera necesario. Se obtendrán de esta manera las proposiciones más simples relativas a las proyecciones de las rectas y de las superficies. Es sólo después que los alumnos hayan adquirido una seguridad suficiente en la ejecución de esos dibujos intuitivos, que se les iniciará en su concepción puramente geométrica, observando que los dibujos geométricos nunca corresponden exactamente a los objetos tales como se les observa.

Se obtendrá la rotación de un cuerpo alrededor de un eje perpendicular a uno de los planos de proyección (así como un desplazamiento paralelo a uno de esos planos)

utilizando la ley sobre las distancias de un punto a los planos de proyección. Repitiendo esta rotación dos o tres veces, sirviéndose alternativamente de ejes perpendiculares a los dos planos de proyección, podrá hacerse que un cuerpo ocupe una posición cualquiera, relativamente a esos planos, y obtener así una representación del cuerpo que permita fácilmente concebir su forma.

Se obtendrá el mismo resultado por medio de proyecciones laterales, es decir, por proyecciones normales sobre los planos perpendiculares a los primitivos planos de proyección. Por este procedimiento, aprende además el alumno un importante principio de construcción que le servirá para la resolución de problemas ulteriores. Por lo demás, es preciso, desde luego habituar a los alumnos a considerar las proyecciones vertical y lateral como un sistema de proyecciones normales, al mismo título que las proyecciones vertical y horizontal.

Un excelente medio para dar a los alumnos una representación clara de un cuerpo, dado por un sistema de proyecciones ortogonales, es de hacerles dibujar en proyección oblícua. Supongamos el cuerpo, o el sistema de ejes trirectángulos que le corresponde, colocados al principio paralelamente a los planos de proyección; para deducir de él una proyección oblícua, bastará saber que las aristas paralelas se proyectan paralelamente y son reducidas en la misma proporción. El profesor tampoco debe titubear en hacer ejecutar dibujos por la axonometría oblícua general, para los cuales la representación de los ejes y las relaciones de reducción son escogidas arbitrariamente. No hay que decir, respecto de esto, que no habrá que detenerse en la demostración del teorema de Pohlke, que justifica ese procedimiento. Así aprenderá el alumno a conocer la manera de obtener esas figuras explicativas, que son de un empleo tan frecuente en las diferentes materias de la enseñanza.

Se aplicará también las proyecciones laterales y oblícuas y los trazados de sombras a objetos técnicos simples.

Las nociones y proposiciones de la estereometría, que son necesarias para el estudio de las proyecciones, encontrarán igualmente colocación en el programa de este año. No es necesario, sin embargo, dedicar demasiado tiempo a la parte que se refiere a las relaciones de posición de las rectas y planos, pues quizá con ello pudiera afectarse el interés de los alumnos. Es preferible estudiar desde luego los cuerpos del espacio, en el cual tales relaciones intervienen, y hacer sentir enseguida la necesidad de una definición exacta de esas relaciones. No será necesario, sin embargo, introducir de golpe esas nociones y proposiciones, pero se presentarán a medida que su utilidad se haga sentir.

5.ª Clase. — Es en esta clase que se hace la introducción sistemática a la geometría descriptiva; al principio habrá que fundarse constantemente sobre el estudio hecho en la 4.ª clase, después se pasará poco a poco a procedimientos más abstractos. No habrá, pues, que detenerse mucho tiempo, al empezar, en las diversas posiciones del punto en los cuatro diedros. Se considerará la construcción de las trazas de una recta como un caso particular de la intersección de una recta y de un plano proyectante (dado por una traza). Los planos no proyectantes se determinarán por dos rectas cualesquiera, o por un triángulo, o por un paralelogramo, más bien que por sus trazas, y las construcciones se ejecutarán por medio de las principales del plano (líneas de nivel y líneas de frente) y no por las trazas. Esta manera de representar un plano es más intuitiva que si se usan las trazas, conduce menos fácilmente a confusiones, y se relaciona al dibujo técnico práctico, en el cual puede decirse que no se emplean las trazas.

En lo concerniente a los capítulos sobre las relaciones de los puntos, rectas y planos, habrá que limitarse a tratar en detalle los problemas fundamentales de un modo tan claro como sea posible, y se considerará los otros problemas como ejercicios, sin llevar demasiado

lejos el examen de los casos particulares. Una vez resueltos los problemas fundamentales, se enseñarán inmediatamente las aplicaciones relativas a los cuerpos de superficies planas, que no serán tratados separadamente. Por el empleo de proyecciones laterales se simplificará considerablemente la resolución de muchos problemas. Es preferible no tratar los triedros en esta clase: se repetirán y completarán las proposiciones de estereometría necesarias a medida que ellas se utilizan.

7.ª *Clase* — En esta clase se tratarán los complementos siguientes:

Proposiciones principales de la proyección acotada, si ya no se las trató en la 5.ª clase; examen de algunas aplicaciones prácticas, los triedros (empleando el ángulo polar) y resolución gráfica de los triángulos esféricos; principios relativos a la representación axonométrica ortogonal de los cuerpos y la proyección estereográfica, ejecución del tornillo.

Como aplicaciones útiles debe recomendarse la construcción de cuadrantes solares y la representación ortogonal de las esferas terrestre y celeste con sus principales círculos, no siendo vertical el eje.

VI

LA ENSEÑANZA MATEMÁTICA EN LAS ESCUELAS REALES DE AUSTRIA

(Extracto del informe destinado a la Comisión Internacional de la enseñanza matemática)

A. — Fin de la enseñanza matemática — Materias de estudio

La introducción da una relación sucinta de las transformaciones que ha experimentado la Escuela real, desde su fundación (1851), bajo la influencia de las necesidades de la industria. En las condiciones actuales de las

escuelas reales, la enseñanza matemática tiene por fin la práctica de las matemáticas elementales, comprendiendo la noción de función, como preparación a las escuelas superiores: no debe tener en vista una cultura especial, sino contribuir al desarrollo general del espíritu por la ciencia.

Los programas vigentes, del 8 de Abril de 1909, que reemplazan los de 1899, tienen las siguientes tendencias:

1. Adaptación al grado de desarrollo de los alumnos.
2. Simplificación de los cursos, por un contacto más estrecho entre diversas ramas, especialmente para todos los grados entre la aritmética y la geometría.
3. Adaptación completa de los estudios matemáticos a las ramas de enseñanza correspondiente, y a los diversos dominios de aplicación en la vida corriente.
4. Comprensión de las relaciones funcionales, desarrolladas por la enseñanza matemática.
5. Cultivo de la representación del espacio, apoyado sobre una actividad manual correspondiente (confección de modelos, medidas, etc.).
6. Supresión de los temas o asuntos anticuados, o reconocidos faltos de interés didáctico, de los detalles insignificantes, y de muchas repeticiones, y de las llamadas a partes separadas del programa. Las tareas han sido simplificadas y se proponen tres deberes en el semestre (antes eran cuatro). Las disposiciones relativas a las tareas o deberes a domicilio, dadas de una lección a otra, no han cambiado.

B. — Métodos de la enseñanza matemática

Método para la enseñanza de la aritmética. — Además de las numerosas obras que tratan del método de enseñanza de las matemáticas, el profesor encontrará direcciones muy acertadas e instrucciones didácticas en la publicación que apareció con motivo del «*proyecto de organización de los gimnasios y escuelas reales austriacas*» del año 1849, por

el doctor Marenzeller, después, en las *instrucciones para la enseñanza en las escuelas reales de Austria,* aparecidas con los programas de estudio de 1879 y 1899. Esas instrucciones contienen indicaciones preciosas respecto de la enseñanza en todas sus ramas. Contienen observaciones preparatorias sobre el objeto y fin de esa enseñanza, sobre el programa en general, sobre los exámenes, sobre los ejercicios que deben hacerse a domicilio y en la escuela, sobre los textos; explican, en una parte especial, las materias de instrucción, descriptas sumariamente en el plan de estudios, y dan indicaciones didácticas sobre su ejecución práctica. No son normas fijas, invariables, que restringen la individualidad del profesor: «no tienen por fin reglar de ninguna manera la marcha de la enseñanza, o de limitar al profesor experimentado en el campo de su experiencia». El profesor encontrará consejos que le permitirán evitar tanteos y errores. Los principios del nuevo programa de estudios de las escuelas reales han sido explicados por «observaciones» especiales, y completan así, en parte, las instrucciones de 1899.

Las instrucciones de 1899 y las observaciones respecto del programa normal de estudios de 1909 (antes reproducidos) constituyen la base de la exposición de los métodos, en el informe del profesor Bergmann.

El texto y el libro de ejercicios. — La enseñanza de la aritmética y de la geometría, se ofrece según un texto claro y metódico. Este, sin embargo, es poco empleado en las lecciones. Siguiendo la exposición en el pizarrón, cada alumno reproduce en un cuaderno todos los teoremas, las reglas y los ejemplos enunciados. Este cuaderno, cuidadosamente contraloreado, constituye la base de la enseñanza, de la cual es la fiel reproducción.

En las clases inferiores, el texto es principalmente un libro de ejercicios con nociones concisas y cortas reglas. Más científico en las clases superiores, contiene todos los teoremas y los ejercicios necesarios, que el alumno consultará como guía práctica cuando lo necesite.

Ejercicios a domicilio. — Deben estar al alcance de todos los alumnos; se dan de una lección a la siguiente, según los problemas hechos en clase. Al principio de la lección, el profesor recorre y verifica algunos de los cuadernos de ejercicios, interroga a varios alumnos, sea preguntándoles resultados, sea haciéndoles resolver en el pizarrón el ejercicio, variando los datos.

Modelos para la enseñanza geométrica. — La observación y el modelo constituyen la base de la enseñanza, en el grado inferior. Un cubo, de unos 25 centímetros de lado, sirve para la teoría de las formas, como punto de partida de la enseñanza por los ojos: podrá ser formado por varillas de madera y un cuadrado de cartón.

El compás y el libro de clase dan el ángulo en el plano o en el espacio. Los diversos triángulos, cuadriláteros, polígonos, círculos y sectores, con las alturas, diagonales, líneas de simetría y diámetros, se hacen con planchuelas recortadas, que se utilizan del mismo modo que un mapa mudo de geografía. Modelos de pirámides y de prismas (de unos 30 centímetros de altura); de la pirámide truncada de base cuadrangular, con su complemento, del cilindro y del cono circulares y de sus derivados, del cono truncado con su complemento, de la esfera, de la semiesfera, de las secciones, segmentos y sectores de la esfera.

Modelos de madera o de alambre para la segunda clase representan dos puntos, dos líneas o dos triángulos simétricos con relación a una recta o a un plano, el cubo, el prisma cuadrado, la pirámide cuadrada, con sus planos simétricos, en fin la esfera con ecuador, paralelos y meridianos. El triedro y su orígen, los ángulos congruentes, las pirámides y prismas rectos y oblícuos, los conos y cilindros, así como los poliedros regulares son representados por modelos de madera o de cartón.

En la tercera clase, se utilizan, por ejemplo, modelos para figuras equivalentes en superficie, tales como paralelogramos, triángulos, trapecios, rectángulos; para el teorema de Pitágoras; para el principio de Cavalieri;

para la fórmula del cubo, de las pirámides, para la descomposición del prisma triangular; para la superficie del cuadrado; para el volumen de un cubo, del cual se duplican o triplican el lado o la superficie de la cara. En las clases superiores los modelos se reemplazan por la perspectiva y por las proyecciones. Para la trigonometría esférica se utiliza un gran globo, sobre el cual se puede dibujar con tiza.

Los aparatos de las colecciones reservadas a la enseñanza de la física sirven también para la representación de los problemas de astronomía.

C. — Exámenes

Examen de ingreso. — Es el primer examen que tienen que pasar los niños de 10 años que ingresan en la escuela real.

El examen de cálculo escrito y oral comprende los números (escritura y lectura), las cuatro operaciones fundamentales, con números enteros y decimales sencillos.

Exámenes de orientación y de clasificación. — La administración de la enseñanza pública estableció, en la ordenanza de 11 de Junio de 1908, *prescripciones para un nuevo reglamento de exámenes* con el objeto de simplificar las pruebas y las clasificaciones.

Los exámenes impuestos en las escuelas medias son los de *orientación* y de *clasificación.* El objeto principal de los primeros es el trabajo en común; por el profesor y sus alumnos, de las materias enseñadas. El examen de orientación permite rever atentamente las diversas lecciones, considerarlas de diversos puntos de vista, ligarlas entre sí y repartirlas concurrentemente.

El examen de clasificación, por lo contrario, que *se presta después del estudio completo de un tema,* permite al profesor juzgar de los conocimientos adquiridos por el alumno, principalmente del punto de vista científico.

Examen de madurez. — El fin principal de este examen

es la prueba de la madurez y del desarrollo suficiente de la inteligencia, que permita principiar estudios científicos tales como los de las escuelas técnicas superiores. Mientras que los exámenes de clasificación tratan de establecer en qué medida poseen los alumnos una parte determinada de las materias enseñadas; el examen de madurez, por lo contrario, abraza el conjunto de los conocimientos adquiridos por el alumno en la Escuela Real Superior.

El nuevo decreto concerniente a los exámenes es de 29 de Febrero de 1908. Insiste sobre el fin del examen de madurez, que no debe ser un examen sobre las cuestiones de detalle, sino únicamente sobre la cultura general adquirida, sobre el desarrollo intelectual alcanzado por el candidato.

La comisión de examen se pronuncia según la impresión de conjunto de las pruebas orales, que son precedidas de pruebas escritas y teniendo en cuenta las notas trimestrales del último año. Cuando un candidato es desaprobado, puede presentarse por segunda vez al fin del semestre o del año; pero no puede inscribirse más de dos veces para examen.

LAS MATEMÁTICAS EN LOS GIMNASIOS POR EL DOCTOR ERW. DINZT

Los nuevos planes de estudio ofrecen poca diferencia para los Gimnasios, Gimnasios-reales y Escuelas-reales.

En los Gimnasios se dedica a la enseñanza de las matemáticas 3 horas semanales en los 7 primeros años, y 2 horas semanales en el 8.º. Según el profesor Dinzt, se estima que ese tiempo es insuficiente.

El profesor Dinzt establece un paralelo entre el plan de estudios de 1900 y el nuevo de 1909. Mientras que por cerca de 60 años se había seguido el principio de dos ciclos de estudio (el ciclo propedéutico, y el de ex-

posición más sistemática), el nuevo plan de estudios trata de adaptar más estrechamente todavía la adquisición de los conocimientos al desarrollo mental de los alumnos, instituyendo para el efecto tres ciclos. El ciclo propedéutico dura tres años, sigue después un ciclo intermediario de 2 años, que conduce a un estudio más sistemático que comprende los tres últimos años.
